

الرياضيات

2025

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الأول
الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

الجزء الخاص بالشرح و التمارين



الرمز



تطبيق
التعلم التفاعلي

الرياضيات



الأول
الثنوي

الفصل الدراسي الثاني



مكتبة الطلبة

للطباعة والنشر والتوزيع

٣ شارع كامل صفدي - الفجالة

تليفون: ٢٥٩٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩ - ٢/٢٥٩٣٤٢

e-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com



الخط الساخن

١٥٠١٤

جميع حقوق الطبع والنشر محفوظة

لا يجوز، بأي صورة من الصور، التوصل (النقل) المباشر أو غير المباشر إلى ما ورد في هذا الكتاب أو نسخه أو تصويره أو ترجمته أو تحويله أو الاقتباس منه أو تحويله رقميًا أو إتاحتها عبر شبكة الإنترنت إلا بإذن كتابي مسبق من الناشر. كما لا يجوز، بأي صورة من الصور، استخدام العلامة التجارية (المعاصر) المسجلة باسم الناشر. ومن يخالف ذلك يتعرض للمساءلة القانونية طبقاً لأحكام القانون ٨٢ لسنة ٢٠٠٢ الخاص بحماية الملكية الفكرية.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمة

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة أملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، وناقذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما أستحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه، لكى يبدي فيه رأيًا... إن كان نقدًا فنحن نرحب به... وإن كانت كلمة ثناء فهي خير مقابل نرجوه، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملًا، وهو ولى التوفيق،

« المؤلفون »

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشؤون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات / إعداد نخبة من خبراء التعليم

القاهرة: جى بى إس ٣٢٠٢٤ - (٣ مج) : ٢٨ سم.

الصف الأول الثانوى، الفصل الدراسى الثانى

المحتويات: ج١. الشرح والتمارين.

ج٢. الجزء الخاص بالامتحانات.

ج٣. الجزء الخاص بالإجابات.

تدمك: ٥ - ٣٣ - ٩٧٠ - ٩٧٧ - ٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم وتدریس.

٢ - التعليم الثانوى.

٥١٠,٧

رقم الإيداع: ٣٢٠٧٧ / ٢٠٢٤ م

تطبيق GPS التفاعلي

التطبيق التفاعلي من سلسلة كتب ...

الامتحان المعاصر



كيفية الاستخدام: 1. نزل التطبيق. 2. أنشئ حسابك. 3. أدخل الكود الموجود على ظهر الغلاف.



استمتع
بجميع مزايا
التطبيق
لجميع المواد الدراسية

تصنيف بلوم للمستويات المعرفية



ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقاً لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالي:

● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

محتويات الكتاب

أولاً : الجبر وحساب المثلثات

المصفوفات



1 تنظيم البيانات في مصفوفات.

الحرس

2 جمع وطرح المصفوفات.

الحرس

3 ضرب المصفوفات.

الحرس

4 المحددات.

الحرس

5 المعكوس الضربي للمصفوفة.

الحرس

الوحدة الأولى

البرمجة الخطية



1 المتباينة الخطية

الحرس

- حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانياً.

2 البرمجة الخطية والحل الأمثل.

الحرس

الوحدة الثانية

حساب المثلثات



1 المتطابقات المثلثية.

الحرس

2 حل المعادلات المثلثية.

الحرس

3 حل المثلث القائم الزاوية.

الحرس

4 زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.

الحرس

5 القطاع الدائري.

الحرس

6 القطعة الدائرية.

الحرس

7 المساحات.

الحرس

الوحدة الثالثة

ثانيًا : الهندسة التحليلية

المتجهات



الكميات القياسية والكميات المتجهة
والقطعة المستقيمة الموجهة.

1
الحرس

المتجهات.

2
الحرس

العمليات على المتجهات.

3
الحرس

الوحدة الرابعة

الخط المستقيم



تقسيم قطعة مستقيمة.

1
الحرس

معادلة الخط المستقيم.

2
الحرس

قياس الزاوية بين مستقيمين.

3
الحرس

طول العمود المرسوم من نقطة
إلى خط مستقيم.

4
الحرس

الوحدة الخامسة

يمكنك

حل امتحان تفاعلي إلكتروني على كل درس باستخدام تقنية :



QR Code

2



افتح التطبيق وامسح



QR code

باستخدام الكاميرا الخاصة بالهاتف
وابدا حل الامتحان مباشرة

1



قم بتحميل أحد تطبيقات

QR code reader

على هاتفك الذكي



Available on the
App Store



أو
Get it on
Google play

◀ بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل
بالإجابات الصحيحة.

أولاً

الجبر وحساب المثلثات

1 الوحدة

المصفوفات.

2 الوحدة

البرمجة الخطية.

3 الوحدة

حساب المثلثات.





الوحدة

المصفوفات

دروس الوحدة

تنظيم البيانات في مصفوفات.

جمع وطرح المصفوفات.

ضرب المصفوفات.

المحددات.

المعكوس الضربي للمصفوفة.

1 الدرس

2 الدرس

3 الدرس

4 الدرس

5 الدرس



نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم المصفوفة ونظمها.
- يتعرف بعض المشكلات الحياتية باستخدام المصفوفات.
- يتعرف بعض المصفوفات الخاصة.
- يتعرف تساوى مصفوفتين.
- يوجد مدور المصفوفة.
- يضرب عددًا حقيقيًا فى مصفوفة.
- يتعرف مفهوم المصفوفة المتماثلة والمصفوفة شبه المتماثلة.
- يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.
- يتعرف خواص جمع وضرب المصفوفات.
- يوظف استخدام المصفوفات فى مجالات الحياة المختلفة.
- يتعرف محدد المصفوفة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد قيمة محدد الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- يوجد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات.
- يحل نظامًا من المعادلات الخطية بطريقة كرامر.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من النظم 2×2 .
- يحل معادلتين آيتيتين باستخدام المعكوس الضرب للمصفوفة.

نبذة تاريخية



J.J. Sylvester (1814 - 1897)

أول من استخدم مصطلح «مصفوفة Matrix» هو العالم الإنجليزي : جيمس جوزيف سلفستر (١٨١٤ - ١٨٩٧م)

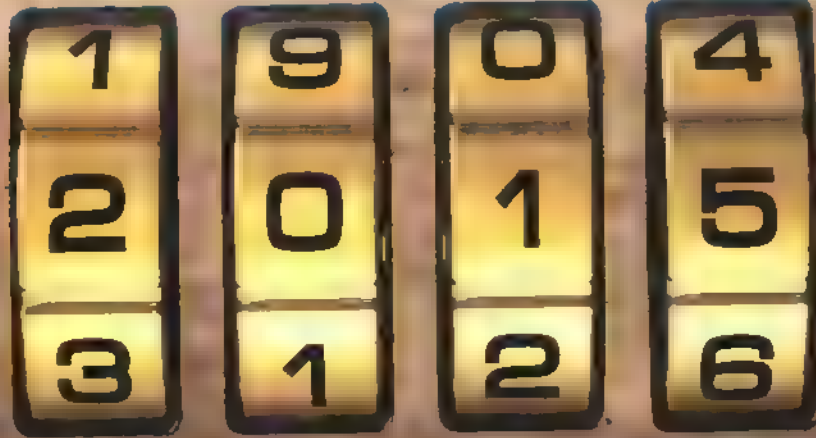


Arthur Cayley (1821 - 1895)

أول من استخدم المصفوفات هو العالم البريطانى كيلي (١٨٢١ - ١٨٩٥م) وهو عالم رياضيات له الكثير من الأبحاث خاصة فى الجبر وتضمنت تلك الأبحاث نظرية المصفوفة.

انتشرت المصفوفات فى عصرنا الحاضر فشملت العديد من فروع العلوم والمعرفة فنجد استخداماتها فى علوم الإحصاء والاقتصاد والاجتماع وعلم النفس، كما أن لها دورًا هامًا فى علم الرياضيات وخاصة فى فرع الجبر الخطى.

تنظيم البيانات في مصفوفات



مثال توضيحي



- أحد محلات بيع البيتزا يبيع أربعة أنواع من البيتزا :

(بيتزا بالخضروات - بيتزا بالدجاج - بيتزا باللحوم -

بيتزا بالجبن)

وينتج لكل نوع من الأنواع السابقة ثلاثة أحجام مختلفة :

(صغير - وسط - كبير)

- لسهولة تذكر المعلومات والمقارنة بينها

يقوم صاحب المحل بجدولة متوسط عدد

القطع المباعة يوميًا في الجدول المقابل

بصورة مختصرة.

| الحجم | | | |
|-------|-----|------|----------------|
| كبير | وسط | صغير | |
| ٩ | ١٣ | ١٥ | بيتزا الخضروات |
| ١٢ | ١٨ | ١٦ | بيتزا الدجاج |
| ٨ | ١٠ | ١٣ | بيتزا اللحوم |
| ١٧ | ٢٠ | ١٨ | بيتزا الجبن |

- كل عدد في هذا الجدول له دلالة ، فالعدد ١٠ يدل على عدد القطع المباعة من بيتزا اللحوم حجم الوسط ،

والعدد ١٢ يدل على عدد القطع المباعة من بيتزا الدجاج الحجم الكبير ، ... وهكذا.

- إذا كنا نعلم مسبقاً أن الأعداد بالصف الأول هي متوسط القطع المباعة يوميًا من بيتزا الخضروات من الأحجام :

الصغير ، الوسط ، الكبير على الترتيب ، وبالمثل الأعداد بالصف الثاني من بيتزا الدجاج ، والثالث بيتزا اللحوم ، والرابع

بيتزا الجبن بنفس الترتيب فإننا نستطيع الاستغناء عن الجدول السابق وكتابة البيانات في صورة أكثر اختصارًا بكتابة

الأعداد فقط المتضمنة فيه بنفس ترتيبها داخل قوسين كبيرين من النوع ()

$$\begin{pmatrix} 9 & 13 & 15 \\ 12 & 18 & 16 \\ 8 & 10 & 13 \\ 17 & 20 & 18 \end{pmatrix} = \text{متوسط البيع اليومي للمحل} = \text{فنكتب}$$

تسمى هذه الصورة **مصفوفة** ، كما تسمى الأعداد بين القوسين **عناصر المصفوفة**.

هذه المصفوفة تتكون من :

أربعة صفوف وثلاثة أعمدة كما بالشكل المقابل

لذلك نقول إنها **مصفوفة على النظم 3 × 4**

(أو اختصاراً **مصفوفة 3 × 4**)

ونلاحظ أننا ذكرنا عدد الصفوف أولاً ثم عدد الأعمدة وليس العكس.

ملاحظة

يمكن لصاحب المحل تنظيم بياناته السابقة في جدول آخر مثل الجدول التالي :

| البيانات | | | | |
|-----------------|---------------|---------------|--------------|----|
| بيوتزا الخضروات | بيوتزا النجاج | بيوتزا اللحوم | بيوتزا الجبن | |
| صغير | 15 | 16 | 13 | 18 |
| وسط | 13 | 18 | 10 | 20 |
| كبير | 9 | 12 | 8 | 17 |

وبالمثل يمكن الاستغناء عن الجدول السابق بكتابة الأعداد داخل مصفوفة.

$$\begin{pmatrix} 18 & 13 & 16 & 15 \\ 20 & 10 & 18 & 13 \\ 17 & 8 & 12 & 9 \end{pmatrix} = \text{متوسط البيع اليومي للمحل} = \text{فنكتب}$$

وهي مصفوفة على النظم 3 × 4

مما سبق يمكن تعريف المصفوفة كما يلي :

تعريف المصفوفة

المصفوفة هي ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) في صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين بحيث

يكون الموقع في المصفوفة له معنى.

المصفوفة المكونة من م صفاً ، ن عموداً تكون على النظم م × ن أو من النوع م × ن (وتقرأ م في ن)

حيث م ، ن عدداً صحيحان موجبان.

عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن

* التعبير عن العنصر داخل المصفوفة :

- يُرمز للمصفوفة عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل : A, B, C, S, V, \dots
- بينما يُرمز للعنصر داخل المصفوفة بأحد الحروف الصغيرة مثل : a, b, c, s, v, \dots
- إذا أردنا التعبير عن العنصر داخل المصفوفة A الذي يقع في الصف v والعمود c فإننا نكتبه على الصورة a_{vc}

فمثلاً العنصر a_{24} يقع في الصف الثاني والعمود الثالث [ويُقرأ : a اثنين ثلاثة]
، العنصر a_{34} يقع في الصف الثالث والعمود الثاني [ويُقرأ : a ثلاثة اثنين]

مثال ١

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \\ 9 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = C, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = B, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

١ اكتب نظم كل من المصفوفات : A, B, C

٢ اكتب العناصر الآتية : $a_{24}, a_{34}, a_{31}, a_{33}, a_{32}$

الحل

١ مصفوفة على النظم 2×2 ، B مصفوفة على النظم 2×2 ، C مصفوفة على النظم 3×3

$$a_{24} = 6, a_{34} = 1, a_{31} = 5, a_{33} = \frac{1}{4}, a_{32} = 2$$

حاول بنفسك

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = S$$

١ اكتب نظم المصفوفة S

٢ اكتب العناصر الآتية : s_{33}, s_{32}, s_{31}

ملاحظة

إذا كانت A مصفوفة على النظم $m \times n$ فيمكننا كتابتها على الصورة :

$$A = (a_{vc}) \text{ حيث } v = 1, 2, \dots, n, c = 1, 2, \dots, m$$

وسوف تقتصر دراستنا على الحالات التي فيها $1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 3$

مثال ٢

اكتب المصفوفة (أ من ع) على النظم 2×2 بحيث: أ من ع = ٢ ص - ع

الحل

$$\therefore \text{المصفوفة على النظم } 2 \times 2 \quad \therefore \begin{pmatrix} 11\text{أ} & 11\text{ب} \\ 22\text{أ} & 22\text{ب} \\ 33\text{أ} & 33\text{ب} \end{pmatrix} = \text{أ} \therefore$$

$$\text{حيث } 3 = 1 - 2 \times 2 = 11\text{أ} \quad , \quad 0 = 2 - 1 \times 2 = 22\text{أ} \quad , \quad 1 = 1 - 1 \times 2 = 33\text{أ}$$

$$4 = 2 - 3 \times 2 = 22\text{ب} \quad , \quad 5 = 1 - 3 \times 2 = 33\text{ب} \quad , \quad 2 = 2 - 2 \times 2 = 33\text{أ}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (\text{أ من ع})$$

نوع المصفوفات الخاصة

مصفوفة الصف

هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة

$$\text{فمثلاً } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{أ} \text{ هي مصفوفة صف على النظم } 1 \times 3$$

مصفوفة العمود

هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد وأى عدد من الصفوف

$$\text{فمثلاً } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{ب} \text{ هي مصفوفة عمود على النظم } 2 \times 1$$

المصفوفة المربعة

هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة

$$\text{فمثلاً } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{أ} \text{ هي مصفوفة مربعة على النظم } 2 \times 2$$

المصفوفة الصفرية

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز \square وتكون على أى نظم.

$$\text{فمثلاً } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \times 2 \square \text{ هي مصفوفة صفرية على النظم } 2 \times 2$$

$$, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 3 \square \text{ هي مصفوفة صفرية على النظم } 1 \times 3$$

المصفوفة القطرية

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار، ما عدا عناصر القطر الرئيسي فيكون أحدها على الأقل لا يساوي الصفر [حيث إن القطر الرئيسي هو القطر الذي يحتوى العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$]

فمثلاً $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة قطرية على النظم 3×3

$m = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة قطرية على النظم 2×2

مصفوفة الوحدة

هي مصفوفة قطرية، يكون فيها كل عناصر القطر الرئيسي مساوية الواحد ويُرمز لها بالرمز I

فمثلاً $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة وحدة على النظم 2×2

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة وحدة على النظم 3×3

لاحظ أن

في مصفوفة الوحدة

$a_{ii} = 1$ لكل i من 1 إلى n

$a_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$

تحقق من فهمك

اكتب نوع ونظم كل مصفوفة مما يأتي :

$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $R = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

تساوي مصفوفتين

• تتساوى المصفوفتان A و B إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً :

١) المصفوفتان على نفس النظم.

٢) كل عنصر في المصفوفة A يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة B

أي أن $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i من 1 إلى n ولكل j من 1 إلى m

فمثلاً $\begin{pmatrix} 2- & 0 & 1 \\ 1- & 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2- & 0 & 1 \\ 1- & 2 & 2 \end{pmatrix}$

بينما $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 2- \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 2- \end{pmatrix}$ لاختلاف العناصر المتناظرة

، وكذلك $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ لأنهما ليستا على نفس النظم.

مثال ٣

أوجد قيمة كل من $س$ ، $ص$ ، $ع$ إذا كان: $\begin{pmatrix} 0+س & 0 & 1- \\ 0 & 2-ص & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & ع \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

الحل

∴ المصفوفتان متساويتان.

∴ $ع = 1-$ ، $س + 0 = 2$ ومنها $س = 2-$ ، $2-ص = 7$ ومنها $ص = 0$

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل من $س$ ، $ص$ إذا كان: $\begin{pmatrix} 2- & 8 \\ ص- & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2- & 2س \\ 9-ص & 3 \end{pmatrix}$

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

إذا كانت A مصفوفة على النظم $n \times m$ فإن حاصل ضرب أى عدد حقيقى k فى المصفوفة A هو المصفوفة kA على نفس النظم $n \times m$ وكل عنصر من عناصر المصفوفة kA يساوى العنصر المناظر له فى المصفوفة A مضروباً فى العدد الحقيقى k

أى إن $kA = A$ حيث $ص = 1, 2, \dots, m$ ، $ع = 1, 2, \dots, n$

أى إن ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى ذلك العدد الحقيقى. ولايغير من نظم المصفوفة

فمثلاً إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 2- & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

فإن $2A = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 2- & 2 \times 6 \\ 2 \times 0 & 2 \times 4 & 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4- & 12 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$3A = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 2- & 3 \times 6 \\ 3 \times 0 & 3 \times 4 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6- & 18 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن أخذ عامل مشترك من بين جميع عناصر المصفوفة.

فمثلاً
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال ٤

إذا كانت:
$$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} 2$$
 فأوجد قيمة: $\sqrt{2}$ ص

الحل

$$\therefore 20 = 5 \text{ ص ومنها } 2 = \sqrt{2}$$

$$16 = 8 \text{ ص ومنها } 4 = \sqrt{2}$$

حاول بنفسك

١ إذا كانت:
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2 = 1$$
 فأوجد: $10 - 1 - 1 - 1 - 1$

٢ إذا كانت:
$$\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 22 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} 4 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} 2$$
 فأوجد: 2 ص

ممدور المصفوفة

في أى مصفوفة $n \times m$ على النظم $m \times n$ إذا استبدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مصفوفة على النظم $m \times n$ تسمى بمدور المصفوفة $n \times m$ ويرمز لها بالرمز $n \times m$

أى إن إذا كانت:
$$(n \times m) = 1$$
 فإن:
$$(m \times n) = 1$$

فمثلاً • إذا كانت:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} 2 = 1$$
 مصفوفة على النظم 2×3

فإن:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} 3 = 1$$
 مصفوفة على النظم 3×2

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} 3$$

لاحظ أن

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} 3$$

• إذا كانت : $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم 1×3 (مصفوفة عمود)

فإن : $B^T = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم 3×1 (مصفوفة صف)

$$B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = {}^M(B),$$

مثال ٥

$$\text{إذا كانت : } A = \begin{pmatrix} 20 \text{ صا} & 20 \text{ صا} \\ 20 \text{ صا} & 20 \text{ صا} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 32 \text{ ص} & 32 \text{ ص} \\ 32 \text{ ص} & 32 \text{ ص} \end{pmatrix} \text{ وكانت : } A = B$$

فأوجد قيمة كل من : ص ، ص

الحل

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 32 \\ 2 \end{pmatrix} = A, B = \begin{pmatrix} 32 \text{ ص} & 32 \text{ ص} \\ 32 \text{ ص} & 32 \text{ ص} \end{pmatrix}$$

$$, \therefore A = B$$

$$\therefore 32 \text{ ص} = 2 \text{ ص} \text{ ومنها } \frac{2}{32} = \frac{2}{32} \text{ ومنها } \frac{2}{32} = \frac{2}{32}, \frac{2}{32} = \frac{2}{32} \text{ ومنها } \frac{2}{32} = \frac{2}{32}$$

حاول بنفسك

$$\text{إذا كانت : } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ فأوجد : ص}$$

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :

• $A = A^T$ تُسمى مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كانت :

• $A = -A^T$ تُسمى مصفوفة شبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت :

فمثلاً

• إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 3- & 1- & 2 \\ 0 & 4 & 1- \\ 0 & 0 & 3- \end{pmatrix}$ فإن : $I^{-1} = \begin{pmatrix} 3- & 1- & 2 \\ 0 & 4 & 1- \\ 0 & 0 & 3- \end{pmatrix}$

أي أن : I مصفوفة متماثلة لأن : $I^{-1} = I$

• إذا كانت : $B = \begin{pmatrix} 4- & \frac{1}{4}- & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2- & 4 \end{pmatrix}$

فإن : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4- & \frac{1}{4}- & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2- & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4- & \frac{1}{4}- & 0 \\ 2- & 0 & \frac{1}{4}- \\ 0 & 2 & 4- \end{pmatrix}$

أي أن : B مصفوفة شبه متماثلة لأن : $B^{-1} = B$

ملاحظات

• إذا كانت : I مصفوفة متماثلة فإننا نلاحظ تماثل

عناصرها حول القطر الرئيسي ،

فيكون : $a_{ij} = a_{ji}$ كما بالشكل المقابل حيث :

$$a_{11} = a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = 3, a_{22} = a_{22} = 4, a_{23} = a_{32} = 2, a_{33} = a_{33} = 3$$

• أي مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة.

• أي مصفوفة وحدة تكون مصفوفة متماثلة ($I^{-1} = I$).

• عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة شبه المتماثلة تكون مساوية الصفر

وعناصرها تحقق العلاقة : $a_{ij} = -a_{ji}$ كما بالشكل المقابل .

حيث : $a_{11} = -a_{11} = 0, a_{12} = -a_{21} = 2, a_{13} = -a_{31} = 3, a_{22} = -a_{22} = 0, a_{23} = -a_{32} = 2, a_{33} = -a_{33} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

القطر الرئيسي

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

القطر الرئيسي

مسألة ٦

$$1 \text{ إذا كانت : } \begin{pmatrix} 8 & 2س & 5 \\ 6 & 2- & 4- \\ 4 & 6 & 2+ص \end{pmatrix} = 0 \text{ مصفوفة متماثلة}$$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

$$2 \text{ إذا كانت : } \begin{pmatrix} 7 & 3س & 0 \\ 2-ع & 0 & 3+ع \\ 0 & 6 & 2ص-س \end{pmatrix} = 0 \text{ مصفوفة شبه متماثلة}$$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع

الحل

١ : مصفوفة متماثلة. $\therefore 2س = 2- = 4- \text{ ومنها } 2- = 2$

، $8 = 2 + 2ص$ $\therefore 2- + 2 = 8 = 2ص$ ومنها $ص = 5$

٢ : مصفوفة شبه متماثلة. $\therefore 2- = 2 + 3س$

، $7- = 2ص - س$

، $2- = 6-ع$ ومنها $2 = ع$

وبالتعويض في (١) : $\therefore 2- = 2 + 3س$ ومنها $2- = 2$

وبالتعويض في (٢) : $\therefore 2ص - س = 7- = 2$ ومنها $2- = 2$

حاول بنفسك

$$1 \text{ إذا كانت : } \begin{pmatrix} 8 & 5س \\ 6 & 2-س \end{pmatrix} = 0 \text{ مصفوفة متماثلة فأوجد قيمة : س}$$

$$2 \text{ إذا كانت : } \begin{pmatrix} 5 & 8- & 0 \\ 12 & 0 & 1س \\ 0 & 5ص & 5- \end{pmatrix} = 0 \text{ مصفوفة شبه متماثلة فأوجد قيمتي : س ، ص}$$



اختبر نفسك

مستويات عليا

على تنظيم البيانات في مصفوفات

تمارين

1

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق

أسئلة الاختبار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ على النظم
 (أ) 1×2 (ب) 3×1 (ج) 2×2 (د) 1×3
- (٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 9$ ، $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = 8$ فإن : $9 + 8 = \dots$
 (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٥- (د) ٣
- (٣) إذا كانت A مصفوفة على النظم 3×2 فإن : عدد عناصر المصفوفة $A = \dots$
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ٦ (د) ٥
- (٤) إذا كانت B مصفوفة على النظم 1×3 فإن : B^T مصفوفة على النظم
 (أ) 1×3 (ب) 3×2 (ج) 1×1 (د) 3×1
- (٥) إذا كانت \square مصفوفة صفرية على النظم 2×2 فإن عدد عناصرها يساوي
 (أ) صفر (ب) \emptyset (ج) ٢ (د) ٤
- (٦) إذا كانت A مصفوفة على النظم 4×3 فإن الصف يحتوى على عنصر.
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ١٢
- (٧) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×3 فإن المصفوفة A^T على النظم
 (أ) 4×6 (ب) 4×3 (ج) 2×6 (د) 2×3
- (٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 7 & 2- & 3 \\ 2 & 4- & 0 \end{pmatrix} = 9$ ، $B = A^T$ فإن : $9 + B = \dots$
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٤ (د) ١٠
- (٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 6 & 7- & 4 \end{pmatrix} = 9$ فإن : $2 = A^T$
 (أ) $\begin{pmatrix} 2- & 6 & 4 \\ 12 & 14- & 8 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7- & 6 \\ 6 & 2- \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 14- & 6 \\ 12 & 2- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 14- & 3 \\ 12 & 1- \end{pmatrix}$
- (١٠) أقل عدد عناصر يمكن أن تحتويها مصفوفة =
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

• (١١) إذا كان عدد عناصر مصفوفة يساوي ٩ عناصر فإن عدد النظم الممكنة لهذه المصفوفة يساوي

- (١) ١ (ب) ٢ (ج) ٦ (د) ٩

• (١٢) إذا كانت A مصفوفة مربعة عدد عناصرها n فإن n يمكن أن تساوي

- (١) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٢

• (١٣) إذا كان عدد عناصر المصفوفة S يساوي ١٢ عنصر فأى مما يأتى لا يمكن أن يكون نظاماً للمصفوفة S ؟

- (١) 4×3 (ب) 6×2 (ج) 8×4 (د) 12×1

• (١٤) المصفوفة $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة

- (١) وحدة. (ب) صفرية. (ج) قطرية. (د) شبه متماثلة.

• (١٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2-20 & 7 \\ 10 & 6-3 \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية فإن : $2 + س =$

- (١) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١١ (د) ١٢

• (١٦) A مصفوفة قطرية على النظم 3×3 وكان : $11 = س + 4$ فإن : $س =$

- (١) صفر (ب) ٤

(ج) -4 (د) أى عدد حقيقى ماعدا -4

• (١٧) فى المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3- & 4 \\ 1- & س & 1 \\ 6 & \cdot & 2 \end{pmatrix}$ إذا كان مجموع عناصر القطر الرئيسى = ضعف مجموع

عناصر القطر الآخر فإن : $س =$

- (١) صفر (ب) -4 (ج) ٤ (د) ٧

• (١٨) إذا كانت A مصفوفة قطرية على النظم 3×3 وكان مجموع عناصر A يساوي ١٢

فإن مجموع عناصر القطر الرئيسى فقط

- (١) يساوي ١٢ (ب) أقل من ١٢ (ج) أكبر من ١٢ (د) يساوي صفر

• (١٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1- & 1 \\ 6 & 3- \\ س & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & س \\ 5 & 6 \\ 1- & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $س =$

- (١) $15-$ (ب) $2-$ (ج) ٢ (د) ١٥

• (٢٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1+س & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2- & س \end{pmatrix}$ فإن : $س + س =$

- (١) ٧ (ب) $3-$ (ج) ٤ (د) ١٠

(٢١) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ فإن: مصفوفة (أ) وحدة. (ب) صفرية. (ج) قطرية. (د) شبه متماثلة.

(٢٢) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$ فإن: $\sqrt{12} = \sqrt{16}$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٣) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$ فإن: $\sqrt{12} = \sqrt{16}$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٤) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ حيث $\frac{\pi}{4} \geq \pi \geq 0$ وكان: $\frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٥) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن قيمة θ التي تجعل θ مصفوفة وحدة هي ... (أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

(٢٦) إذا كانت المصفوفة: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٧) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٨) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٩) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ حيث $I = I$ مصفوفة الوحدة فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٠) إذا كانت المصفوفة: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ متماثلة فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣١) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٢) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٣) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٤) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٥) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٧) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ حيث $I = I$ مصفوفة الوحدة فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٨) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٩) إذا كانت المصفوفة: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ متماثلة فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٤٠) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $\pi = \pi$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣١) إذا كانت المصفوفة: $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٠ & ٦ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ - شبه متماثلة فإن : قيمة $م + ع - ن$ =

- (١) ١٢ (ب) ٨- (ج) صفر (د) ١٢-

(٣٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٤ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان : $١ = ١ - ٣$ فإن : $س + ص + ع + ل$ =

- (١) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٢-

(٣٣) إذا كانت المصفوفة : $\begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix}$ - شبه متماثلة فإن : θ =

- (١) صفر (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) π (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٣٤) إذا كانت A مصفوفة على النظم ٢×٢ حيث $A_{م ع} = ص - ٢ ع$ فإن : $A =$

- (١) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٣٥) إذا كانت A مصفوفة وكان $A_{م م} = س$ لكل $س \in \{١, ٢\}$ ، $ص \in \{١, ٢, ٣\}$ فإن المصفوفة A تساوى

- (١) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

(٣٦) إذا كانت A مصفوفة على النظم ٢×٢ وكان : $A_{م م} = \frac{س}{ص}$

فإن : $١١١ \times ١١١ \times ١١١ \times ١١١ =$

- (١) ٤ (ب) ٢ (ج) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٧) إذا كانت A مصفوفة على النظم ٢×٣ وكان : $١١١ = ٢$ ، $١١٢ = ٣$ ، $١٢١ = \frac{١}{٢}$ ، $١٢٢ = ٣ + ١١٢$ ،

$١٢٣ = ٩ -$ ، $٢١١ = \frac{١}{٢}$ فإن المصفوفة $A =$

- (١) $\begin{pmatrix} ٩ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٩ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

(٣٨) إذا كانت A مصفوفة مربعة على النظم ٣×٣ حيث $A_{م م} = \frac{ص}{س} - \frac{س}{ص}$

فإن : $١ + ١ =$

- (١) صفر (ب) \square (ج) ١٢ (د) ٢٢

$$(39) \text{ إذا كانت } A \text{ مصفوفة مربعة على النظم } 2 \times 2 \text{ حيث } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ فإن : } A^{-1} = \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(40) \text{ إذا كانت } A \text{ مصفوفة صف وكان } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ فإن : } A = \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(41) \text{ إذا كانت } A \text{ مصفوفة شبه متماثلة على النظم } 2 \times 2 \text{ فإن : } A^{-1} = \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(42) \text{ إذا كانت } A \text{ مصفوفة متماثلة وكان } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ فإن : } A = \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(43) \text{ إذا كانت المصفوفة } A \text{ على النظم } m \times n \text{ حيث } m > n \text{ وكان عدد عناصرها يساوي } 2$$

$$\text{وكانت المصفوفة } B \text{ على النظم } n \times 2 \text{ فإن عدد عناصر المصفوفة } A+B \text{ يساوي } \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(44) \text{ إذا كانت } A \text{ مصفوفة على النظم } 2 \times 2 \text{ وكان مجموع عناصر المصفوفة } A \text{ يساوي } 5$$

$$\text{فإن مجموع عناصر المصفوفة } A^{-1} \text{ يساوي } \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(45) \text{ إذا كانت : } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يمكن أن يمثل قاعدة لإيجاد عناصر } A^{-1} ?$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(46) \text{ إذا كانت المصفوفة : } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ شبه متماثلة فإن : } A^{-1} = \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(47) \text{ إذا كانت } A \text{ مصفوفة قطرية على النظم } 2 \times 2 \text{ وكان } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ لكل } s = 0 \text{ فإن : } \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(48) \text{ إذا كانت المصفوفة } A \text{ متماثلة وفى نفس الوقت هى شبه متماثلة فإن : } \dots$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۴ (۱)

(٥٠) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ١ & ٢٠ \\ ٤٥ & ٧٠ \end{pmatrix} = ١$ ، $\begin{pmatrix} ٣ - م & ٦٠ \\ ٤٥ & ٢٠ \end{pmatrix} = م$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٢٠ \\ ٤٥ & ٧٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ - م & ٦٠ \\ ٤٥ & ٢٠ \end{pmatrix} = ١$ وكان: $١ = م$

١ (د) ٢- (ج) ١٠ (د) ٢ (ج)

٥١) إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ أي من العبارات التالية تكون صحيحة ؟

(١) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(ج) (٢) ، (٣) فقط . (د) (١) ، (٢) ، (٣) معًا .

55

١) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(١) اذكر نظم كل مصفوفة. (٢) اكتب كلاً من العناصر الآتية: 324 ، 11 ، 13 ، 14 ، 33 ، 13 .

اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (r) \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} (r) \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (1) \right. \right.$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} (r) \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \vdots & 1 \end{pmatrix} (0) \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} (2) \right. \right.$$

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1. & 12. & 15 \\ 7 & 10. & 20 \\ 3 & 1 & 2. \end{pmatrix}$ فأوجد : $5 - 1$

4 أوجد مدور كل من المصفوفات التالية موضحًا نظم المصفوفة الناتجة :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(1)} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)} \right.$$

5 اكتب جميع عناصر المصفوفات الآتية :

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 &= (أ ص ع) , \quad 2 = 1 ص , \quad 3 = 1 ع , \quad 4 = 2 ص , \quad 5 = 2 ع , \quad 6 = 3 ص , \quad 7 = 3 ع \\ (2) \quad 1 &= (ب ص ع) , \quad 2 = 1 ص , \quad 3 = 2 ص , \quad 4 = 2 ع , \quad 5 = 3 ص , \quad 6 = 3 ع \\ (3) \quad 1 &= (ج ص ع) , \quad 2 = 1 ص , \quad 3 = 2 ص , \quad 4 = 2 ع , \quad 5 = 3 ص , \quad 6 = 3 ع \end{aligned}$$

6 اكتب المصفوفة 1 إذا كانت : 1 = (أ ص ع) لكل $\{1, 2, 3\} \ni$ ص ، $\{1, 2, 3\} \ni$ ع

اكتب المصفوفة 1 إذا علم أن : 1 = ص - ص - ص ثم أوجد : 1

7 اكتب المصفوفة : 1 = (أ ص ع) على النظم 2×2 حيث 1 = ص - ص - ص

ثم أوجد المصفوفة ج حيث ج = 1 واذكر نظمها وأوجد قيمة ج إذا كان 1 = ص

8 أوجد قيمة كل من 1 ، 2 إذا كان : $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 + 3 & 1 - 2 \end{pmatrix}$ ، 2 ، 3

9 إذا كانت : $\begin{pmatrix} 4 & 25 \\ 18 + ص & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 - 3 \\ 12 + 3 & 3 \end{pmatrix}$ ، 1 ، 2 ، 3

فأوجد قيمتي : 1 ، 2

10 إذا كانت : $\begin{pmatrix} 5 & 28 \\ 10 - 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 + 3 \\ 10 - 4 & 2 \end{pmatrix}$ ، 1 ، 2 ، 3

11 إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 10 + 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، 1 ، 2 ، 3

أوجد قيمة كل من : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12

12 إذا كانت : $\begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12

فأوجد قيمة كل من : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12

﴿ ١٣ ﴾ أوجد قيم a ، b ، c ، d إذا كان :

К 7 6 7 6 7-6 8 9

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & 1-1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 12 \\ 1. & 5-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 5+12 & . \end{pmatrix} (2)$$

18 6 7-6 7 6 7

$$\begin{pmatrix} 2- & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+1 \\ 52+1-1 & 1+1+1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

١٤ بين آيا من المصفوفات الآتية متماثلة وأيها شبه متماثلة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (r) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (r) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1)$$

١٥ إذا كانت المصفوفة متماثلة حيث $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٢+ص \\ ١+ع & ١- & ٨ \\ ٢+ص & ٢+ع & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة كل من : ص ، ع

١٦ إذا كانت : مصفوفة شبه متماثلة حيث $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2- & 5- \\ 6+ & 0 & 42 \\ 3ص+ & 6 & 0 \end{pmatrix}$

11-2

فأوجد قيمة : s s ع

مسائل تقییس و مهارت التفكير

၆၁၁

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(۱) إذا كان: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ وكان $1 - 1 = 0$ فإن: $\exists \dots$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} \in \mathbb{A}^- \right\} \text{ (A)} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} \in \mathbb{A} \right\} \text{ (B)} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} \in \mathbb{A}^- \right\} \text{ (C)} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} \in \mathbb{A} \right\} \text{ (D)}$$

(٢) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة: $x^2 - 3x + 1 = 0$

وكان $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $1 - 1 = 0$ =

$$\xi(u) \qquad \eta\left(\frac{u}{2}\right) \qquad \psi(u) \qquad \chi(u)$$

(٣) إذا كانت: $\begin{pmatrix} \text{ح} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ز} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{pmatrix}$ مصفوفة شبيهة متماثلة فإن: $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح} + \text{و} + \text{هـ} + \text{ز} + \text{ع} + \text{ص} + \text{س}}{\dots} = \dots$

• (٤) إذا كانت المصفوفة (أ س ص) على النظم 2×2 حيث أ س ص = س + ٢ ص وكان مجموع عناصر الصف الأول = ٢ فإن : له =

(١) ٢ (ب) ٢ - (ج) $2\sqrt{2}$ (د) $2\sqrt{2} \pm 2$

• (٥) إذا كانت أ مصفوفة على النظم $m \times n$ وكانت أ^٣ على النظم $(2 - m) \times (1 - n)$ فإن : م + ن =

(١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

• (٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ فإن : س ص =

(١) ٢ (ب) ٣ - (ج) ٢ - (د) ٢

• (٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم 2×2 حيث أ س ص = $\begin{cases} س + ص \\ لكل س \neq ص \\ ٦ \\ لكل س = ص \end{cases}$ فإن : مجموع عناصر القطر الرئيسي يساوى

(١) ١ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) ١٨

• (٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ س + ص & س + ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٢٥ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\frac{س}{٢} = \frac{٢}{٥}$

(١) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (ج) ١٥ (د) ٥



• ألعاب : رصد مدرب فريق كرة السلة بالمدرسة إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات

دورى الفصول فكانت على النحو التالى :

سمير : لعب ١٠ مباريات ، ٢٠ تسديدة ، ٥ أهداف.

حازم : لعب ١٦ مباراة ، ٣٥ تسديدة ، ٨ أهداف.

كريم : لعب ١٨ مباراة ، ٤١ تسديدة ، ١٠ أهداف.

(١) نظم البيانات في مصفوفة على أن ترتب أسماء اللاعبين ترتيباً تصاعدياً تبعاً لعدد الأهداف.

(٢) حدد نظم المصفوفة ، ما قيمة أ ؟



جمع وطرح المصفوفات



جمع المصفوفات

أولاً

إذا كانت A ، B مصفوفتين لهما نفس النظم فإن عملية الجمع تكون ممكنة ويكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها نفس النظم وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A ، B

فمثلاً إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ فإن $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ 3+3 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

مثال ١

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

أوجد إن أمكن كلاً من: $A + B$ ، $B + C$

الحل

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad B + C = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 1+6 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

٢ المصفوفتان A ، B لا يمكن جمعهما لاختلاف نظمهما

حيث إن: A مصفوفة على النظم 2×2 ، B مصفوفة على النظم 3×2

مثال ٢

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = 2$ ، فحقق أن : $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = 1 + 2$

الحل

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = 1 + 2 \therefore$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 1 + 2 \therefore$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \quad ، \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 1 \therefore ،$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 1 \therefore$$

من (١) ، (٢) نجد أن : $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = 1 + 2$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ، فأوجد : $\frac{1}{3} (1 + 2)$

مثال ٣

أوجد قيم a ، b ، c ، d التي تحقق المعادلة : $\begin{pmatrix} 4+a & 4 \\ 3 & 3+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} 3$

الحل

$$(ضرب عدد حقيقي في مصفوفة) \begin{pmatrix} 4+a & 4 \\ 3 & 3+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16+a & 4+2c \\ 9 & 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \therefore$$

ومن خاصية تساوي مصفوفتين : $4+2c=9$ ، $16+a=9$ ومنها : $c=5/2$ ، $a=-7$

$$3+c=9 \quad ، \quad 3=6 \quad ، \quad 1+c=9 \quad ، \quad 3=9$$

$$\frac{1}{3} = 3 \quad ، \quad 1+c=9 \quad ، \quad 3=9$$

حاول بنفسك

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} 3$ ، فأوجد قيمة كل من : a ، b ، c ، d

خواص عملية جمع المصفوفات

بفرض أن A, B, C ثلاث مصفوفات من النظم $m \times n$ وأن \square مصفوفة صفرية من نفس النظم
فإن الخواص الآتية تتحقق :

خاصية الانغلاق

$A + B$ تكون مصفوفة من نفس النظم $m \times n$

خاصية الإبدال

$$A + B = B + A$$

$$\text{فمثلاً} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خاصية الدمج

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

فمثلاً

$$\text{إذا كانت: } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 7 & 6 \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = B, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C$$

$$\text{فإن: } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right] = A + (B + C)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 15 & 13 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (A + B) + C,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 25 & 15 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{أي أن}$$

خاصية وجود المحايد الجمعي

المصفوفة الصفرية \square هي المحايد الجمعي لأي A : $A + \square = \square + A = A$

$$\text{فمثلاً} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

خاصية المعكوس (النظير) الجمعي

حيث $\square = 1 + (1 -) = (1 -) + 1$ هو النظير الجمعي للمصفوفة 1

فمثلاً إذا كانت : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$ فإن : المعكوس الجمعي لها هو : $1 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\text{حيث : } 2 \times 2 \square = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

طرح المصفوفات

إذا كانت 1 ، 2 مصفوفتين لهما نفس النظم $m \times n$ فإن ناتج الطرح $(1 - 2)$

هو المصفوفة $ج$ من النظم $m \times n$ والتي تُعرف كما يلي :

$$ج = 1 - 2 = 1 + (-2) \text{ حيث } (-2) \text{ هي المعكوس الجمعي للمصفوفة } 2$$

فمثلاً إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2$

$$\text{فإن : } 1 - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 1 - 2$$

ملاحظة

يمكن إجراء عملية الطرح مباشرة بطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين.

فمثلاً $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

مثال 4

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = ج ، \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 ، \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

أوجد قيمة : $4 - 2 + ج$

الحل

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{4} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} 2 - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} 4 = ج \frac{1}{4} + 2 - 16$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 3 \\ 21 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 4 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} =$$

حاول بنفسك

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{ج}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{ب}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{أ}$ فأوجد قيمة: $2\text{ج} + 1\text{أ} - 2\text{ب}$

ملاحظة

عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية وليست دامتجة.

مثال ٥

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \text{أ}$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{ب}$ أوجد المصفوفة س بحيث: $3\text{س} + 2\text{ب} = \text{أ}$

الحل

$\therefore 3\text{س} + 2\text{ب} = \text{أ}$ بإضافة المعكوس الجمعي للمصفوفة 2ب للطرفين

$$\therefore 3\text{س} + 2\text{ب} + (-2\text{ب}) = \text{أ} + (-2\text{ب})$$

$$\therefore 3\text{س} = \text{أ} - 2\text{ب} \quad (\text{بضرب الطرفين في } \frac{1}{3})$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{3} [\text{أ} - 2\text{ب}]$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال ٦

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{أ}$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{ب}$

أوجد المصفوفة س التي تحقق أن: $2\text{س} = [\text{أ} - \text{ب}]$

الحل

$$\therefore 2\text{س} = [\text{أ} - \text{ب}] \quad \therefore 2\text{س} = \text{أ} - \text{ب} \quad \text{وبإضافة المصفوفة } \text{أ} \text{ للطرفين}$$

$$\therefore 2\text{س} + \text{ب} = \text{أ} \quad \therefore 2\text{س} + \text{ب} = \text{أ}$$

$$\therefore 2\text{س} = \text{أ} - \text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 1- & & \frac{13}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2- & 14 & 13 \end{pmatrix} \frac{1}{7} = \text{س مد} \therefore$$

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ 7 & \frac{5}{7} \\ 1- & \end{pmatrix} = \text{س} \therefore \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 1- & 7 & \frac{13}{7} \end{pmatrix} = \text{س مد} \therefore (\text{س مد}) = \text{س مد} \therefore$$

مثال ٧

إذا كانت : س + ٢ س مد = $\begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ فأوجد : المصفوفة س

الحل

$$(١) \quad \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} = \text{س} + ٢ \text{ س مد} \therefore$$

وبأخذ مدور الطرفين : $\therefore (\text{س} + ٢ \text{ س مد}) = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} \text{ مد}$

$$(٢) \quad \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = \text{س} + ٢ \text{ س مد} \therefore$$

وبضرب المعادلة (٢) $\times ٢$:

$$(٣) \quad \begin{pmatrix} 26- & 18- \\ 12- & 28- \end{pmatrix} = \text{س} - ٤ \text{ س مد} \therefore$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12- & 9- \\ 6- & 10- \end{pmatrix} \frac{1-}{3} = \text{س} \therefore \quad \begin{pmatrix} 12- & 9- \\ 6- & 10- \end{pmatrix} = ٣ \text{ س} \therefore (٣) ، (١) \text{ بجمع}$$

لاحظ ان

$$\begin{cases} \text{س} + ٢ \text{ س مد} = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} \\ \text{س} = \begin{pmatrix} 12- & 9- \\ 6- & 10- \end{pmatrix} \frac{1-}{3} \end{cases}$$

حاول بنفسك

$$\begin{pmatrix} 2- & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 4 \end{pmatrix} = \text{ب} ، \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2- \end{pmatrix} = \text{ا} \therefore$$

فأوجد المصفوفة س بحيث : $٣ \text{ ا} - ٢ \text{ ب} = ٢ \text{ س} - ٣ \text{ ا}$ حيث ا على النظم ٢×٢

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية في جمع وطرح المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك في نهاية الوحدة.

لاحظ ان

لاى مصفوفة مربعة ا يكون

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{ا} \therefore \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{ا}$$

مصفوفة متماثلة مصفوفة شبه متماثلة



اختر نفسك

مستويات عليا

على جمع وطرح المصفوفات

تمارين

2

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : \square هي المصفوفة الصفرية على النظم 2×2

فإن : $\square + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

- (أ) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) \square (ج) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ I (١)

(٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$ ، $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$ فإن : $\dots\dots\dots = 3 + 4$

- (أ) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(٣) $\dots\dots\dots = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

- (أ) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$ I (١)

(٤) إذا كانت : $I = 3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فإن : $\dots\dots\dots = 3$

- (أ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (١)

(٥) $\dots\dots\dots = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- (أ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (١)

(٦) إذا كان : $2 \text{ س} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \text{صفر} & 4 \end{pmatrix} = \square$ فإن : المصفوفة س = $\dots\dots\dots$

- (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \text{صفر} & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \text{صفر} & 2 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \text{صفر} & 2 \end{pmatrix}$ (١)

(٧) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- (أ) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (١)

(٨) إذا كان: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ ص \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} س \\ ٦ \end{pmatrix}$ فإن: $س + ص = \dots\dots\dots$

(١) ١ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٢

(٩) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٣- ١ \\ ٦ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- ١ \\ ٦ ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ ٢ \\ ٥ ٣- \end{pmatrix}$ فإن: $س + ص + ل = \dots\dots\dots$

(١) ٢- (ب) ٦- (ج) ١ (د) ٨-

(١٠) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ١ ٥ \\ ٢- ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ ٤ \\ ١ ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ ١ \\ ٥ ح فإن: $س + ص + ل = \dots\dots\dots$$

(١) $\begin{pmatrix} ٢- ١ \\ ٢- ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ ١ \\ ٢ ٢- \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ١ ١ \\ ٢ ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ ١ \\ ٢- ٢- \end{pmatrix}$

(١١) إذا كان: $\begin{pmatrix} ١ ٦ \\ ٣- ٥ \end{pmatrix} = س \begin{pmatrix} ١ ٥ \\ ١ ٥ \end{pmatrix} - ص \begin{pmatrix} ١ ٢- \\ ١ ١ \end{pmatrix}$ فإن: $س + ص = \dots\dots\dots$

(١) ٤ (ب) ٢ (ج) ٢ (د) ٢-

(١٢) إذا كانت: $س، ص، ع$ أعداداً حقيقية وكان $س \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ١ \end{pmatrix} + ص \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix} + ع \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

فإن: $س ص ع = \dots\dots\dots$

(١) ١٢ (ب) ٤ (ج) ١٢- (د) ٢

(١٣) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٣ ٣ \\ ٤ س- ٢- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ ٣ \\ ٢+ ص س+ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ فإن: $س + ص = \dots\dots\dots$

(١) ٢- (ب) ١- (ج) ٠ (د) ٤-

(١٤) إذا كان: $\begin{pmatrix} ٢- س ١ \\ ٤ ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١- ص ٣ \\ ٥ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س ٥- ٩ \\ ٤ ٤ \end{pmatrix}$ فإن: $س = \dots\dots\dots$

(١) ٢- (ب) ٥- (ج) ٣- (د) ٧-

(١٥) لاى مصفوفة $\begin{pmatrix} ١ \\ ١- \end{pmatrix}$ يكون: $\dots\dots\dots$

(١) ١ (ب) ١- (ج) $\begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ ١ \\ ١ ١ \end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت $\begin{pmatrix} ١ \\ ١- \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢×٢ ، $س$ هي المعكوس الجمعى للمصفوفة $\begin{pmatrix} ١ \\ ١- \end{pmatrix}$

فإن $س$ على النظم $\dots\dots\dots$

(١) ٢×٢ (ب) ٢×٢ (ج) ٢×٢ (د) ٢×٢

(١٧) إذا كانت $\begin{pmatrix} ١ \\ ١- \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢×٢ ، $س$ مصفوفة على النظم ٢×٢ ، $س$ مصفوفة على النظم ٢×٢ فأي العمليات الآتية معرفة؟

(١) $١ + س$ (ب) $س - ١$ (ج) $١ + س$ (د) $س - ١$

(١٨) إذا كانت A مصفوفة متماثلة فأى مما يأتى يكون متماثلة أيضًا ؟

- (١) $2A$ (٢) $A - I$ (٣) A^T
(١) فقط (ب) (١) ، (٢) فقط (ج) (٢) ، (٣) فقط (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(١٩) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $I \neq A + B$

- (١) $A - B$ (ب) $A + B^T$ (ج) $A + B$ (د) $A + B$

(٢٠) إذا كانت A مصفوفة قطرية على النظم 2×2 وكان حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسى - I (حيث $I \neq 0$) وكانت المصفوفة B هى المعكوس الجمعى للمصفوفة A فإن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى للمصفوفة $B =$

- (١) I (ب) $-I$ (ج) $\frac{1}{I}$ (د) $2I$

(٢١) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن A مصفوفة

- (١) صف (ب) عمود (ج) متماثلة (د) شبه متماثلة

(٢٢) إذا كانت A مصفوفة شبه متماثلة فإن $A + A^T =$

- (١) $2A$ (ب) $2A^T$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) صفر

(٢٣) إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن $\frac{1}{A} (A + I) =$

- (١) I (ب) $\frac{1}{A}$ (ج) I (د) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(٢٤) $(S^T)^T - S =$

- (١) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) S (ج) $2S$ (د) صفر

(٢٥) إذا كانت المصفوفتان A ، B لهما نفس النظم $m \times n$

فإن المصفوفة $A - B$ تكون على النظم

- (١) $m \times m$ (ب) $n \times n$ (ج) $m \times m$ (د) $n \times n$

(٢٦) إذا كانت A ، B مصفوفتين على النظم 2×2 فإن : المصفوفة $(5A + 3B)^T$

على النظم

- (١) 2×2 (ب) 2×5 (ج) 2×2 (د) 2×2

(٢٧) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $A + B + C =$

وكان : $A - B = 3C$ فإن $S =$

- (١) 6 (ب) 2 (ج) 6 (د) 9

(٢٨) إذا كان : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $2(A + B)^T =$

- (١) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 2 & 1- \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 2- & 3 \\ 4- & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1$ فإن : $\dots = \dots$

$$\begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 6- & 4 \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6- & 1- \end{pmatrix} (ب) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6- & . \end{pmatrix} (ج) \quad \begin{pmatrix} . & 2 \\ 6- & 1 \end{pmatrix} (د)$$

(٣٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 1$ فإن : $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \dots$

$$2-1 (1) \quad I2-1 (ب) \quad I+1 (ج) \quad I-1 (د)$$

(٣١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & . \\ 4- & 3 \end{pmatrix} = -1$ ، $\begin{pmatrix} 12 & . \\ 24 & 2 \end{pmatrix} = -1$ فإن : $1+2-3 = \dots$

$$19- (1) \quad 7- (ب) \quad 7 (ج) \quad 19 (د)$$

(٣٢) إذا كانت 1 ، مصفوفتان بحيث $1+2=3-1$ فإن : \dots

(1) مصفوفة صفرية. (ب) مصفوفة صفرية.

(ج) مصفوفة وحدة. (د) مصفوفة معكوس جمعي للمصفوفة 1

(٣٣) إذا كانت 1 ، مصفوفتان من نفس النظم 2×2 وكان : $I=1+2$ ، $I=2-1$ فإن : $\dots = \dots$

$$\begin{pmatrix} . & 1 \\ 1 & . \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} . & 2 \\ 2 & . \end{pmatrix} (ب) \quad \begin{pmatrix} . & 2 \\ 2 & . \end{pmatrix} (ج) \quad \begin{pmatrix} . & 1 \\ 1 & . \end{pmatrix} (د)$$

(٣٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 4- & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 1+1$ وكان : $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2- & 4 \end{pmatrix} = 1+1$ فإن : $\dots = \dots$

$$\begin{pmatrix} . & 1 \\ 6 & 2- \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ . & 2- \end{pmatrix} (ب) \quad \begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 6 & . \end{pmatrix} (ج) \quad \begin{pmatrix} . & 1 \\ 6 & 2- \end{pmatrix} (د)$$

(٣٥) إذا كان : $\begin{pmatrix} 5- & . \\ 13 & 7 \end{pmatrix} = 1+2$ وكان : $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 1- \end{pmatrix} = 1+2$ فإن : $\dots = \dots$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & . \end{pmatrix} (ب) \quad \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ . & 2 \end{pmatrix} (ج) \quad \begin{pmatrix} . & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} (د)$$

(٣٦) أبسط صورة للمقدار : $\theta \begin{pmatrix} \theta \cos \theta & \theta \sin \theta \\ \theta \sin \theta & \theta \cos \theta \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \theta \sin \theta & \theta \cos \theta \\ \theta \cos \theta & \theta \sin \theta \end{pmatrix}$ تساوي : \dots

$$\begin{pmatrix} \theta \sin \theta & 1 \\ 1 & \theta \sin \theta \end{pmatrix} (1) \quad I (ب) \quad I- (ج) \quad \begin{pmatrix} \theta \sin \theta & 1 \\ 1 & \theta \sin \theta \end{pmatrix} (د)$$

(٣٧) أبسط صورة للمقدار : $\theta \begin{pmatrix} \theta \sin \theta & \theta \cos \theta \\ \theta \cos \theta & \theta \sin \theta \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \theta \sin \theta & \theta \cos \theta \\ \theta \cos \theta & \theta \sin \theta \end{pmatrix}$ تساوي : \dots

$$\begin{pmatrix} . & 1 \\ 1- & . \end{pmatrix} (1) \quad I (ب) \quad I- (ج) \quad \begin{pmatrix} . & 1 \\ 1- & . \end{pmatrix} (د)$$

(٣٨) إذا كان : $\begin{pmatrix} \theta \sin \theta & \theta \cos \theta \\ \theta \cos \theta & \theta \sin \theta \end{pmatrix} = 1$ حيث : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ وكان : $I=1+1$ فإن : $\theta = \dots$

$$\frac{\pi}{4} (1) \quad \frac{\pi}{6} (ب) \quad \frac{\pi}{4} (ج) \quad \frac{\pi}{3} (د)$$

(٣٩) إذا كانت : $I = (I \text{ مص } ع)$ مصفوفة على النظم ٣×٣ حيث $I \text{ مص } ع = \begin{cases} \text{ص} + ع , \text{ ص} = ع \\ \text{ص} - ع , \text{ ص} \neq ع \end{cases}$

فإن : $I + I = ٤ \times \dots \dots \dots$

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} (ب) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} (ج) \begin{pmatrix} 2- & 1- & 2 \\ 1- & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} (د) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1- \\ 6 & 1- & 2- \end{pmatrix}$$

(٤٠) إذا كانت I مصفوفة على النظم ٢×٢ حيث $I \text{ مص } ع = \begin{cases} \text{ص} - ع \\ \text{ص} + ع \end{cases}$ وكانت I مصفوفة على النظم

٢×٢ حيث $I \text{ مص } ع = \text{ص} - ع$ فإن : $I + I = \dots \dots \dots$

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (ب) I \quad (ج) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (د) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(٤١) إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ وكانت الدالة d معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

$d(S) = -S = ٢S + I$ فإن : $d(I) = \dots \dots \dots$

$$(1) \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} (ب) \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} (ج) \begin{pmatrix} 9 & 3- \\ 6 & 0 \end{pmatrix} (د) \begin{pmatrix} 14 & 3- \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(٤٢) إذا كان S مصفوفة على النظم ٢×٢ وكان : $S + S = ٣$ فإن مجموع عناصر S يساوي

$$(1) 6 \quad (ب) 5 \quad (ج) 4 \quad (د) 3$$

(٤٣) المصفوفة المربعة يمكن التعبير عنها دائماً

(أ) كمجموع مصفوفتين إحداها متماثلة والأخرى شبه متماثلة.

(ب) كمجموع مصفوفتين إحداها قطرية والأخرى متماثلة.

(ج) كحاصل ضرب عدد حقيقي \neq صفر في مصفوفة متماثلة لها نفس النظم.

(د) بجمع المصفوفة نفسها مع مدورها.

(٤٤) إذا كانت : I, B, C ثلاث مصفوفات بحيث $I = B + C$ ، $\begin{pmatrix} 1- & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C + B$ ، $\begin{pmatrix} 2- & 2 \\ 1- & 1 \end{pmatrix} = C + B$

فإن : $I + B + C = \dots \dots \dots$

$$(1) \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} (ب) \begin{pmatrix} 1- & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (ج) \begin{pmatrix} 2 & 1- \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (د) \begin{pmatrix} 2- & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

التمارين المستقلة

إذا كانت $I = \begin{pmatrix} 1 & 4- \\ 7- & 3 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 7- & 2 \\ 1- & 8 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

فأوجد كلاً مما يأتي إن أمكن : (١) $I + B$ (٢) $C + I$

٢ إذا كان: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$ ،

فاوجد المصفوفة: $2\mathbf{I} - 3\mathbf{B} + 4\mathbf{E}$

٣ إذا كان: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$ ، $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$ ،

فاوجد المصفوفة: $3\mathbf{S} - \mathbf{V} + \mathbf{E}$

٤ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ، حقق أن: $4\mathbf{I} + \mathbf{B} = 4\mathbf{I} + \mathbf{B}$

٥ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ،

حقق أن: $\mathbf{I} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{I}$ (١)

(٢) $\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$

(٤) $(\mathbf{B} - \mathbf{I}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}) = (\mathbf{B} + \mathbf{I}) - (\mathbf{I} + \mathbf{B})$

(٣) $\mathbf{I} - \mathbf{B} \neq \mathbf{B} - \mathbf{I}$

٦ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$ ،

(٢) $2\mathbf{I} + \mathbf{B} - 2\mathbf{E}$

أوجد: $\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{B})$ (١)

(٤) $2\mathbf{I} + \mathbf{B} - 2\mathbf{E}$

(٣) $2\mathbf{I} + \mathbf{B} - 2\mathbf{E}$

٧ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ،

فاوجد ناتج كل من العمليات الآتية إن أمكن ، مع ذكر السبب في حالة تعذر إجراء العملية :

(٣) $\mathbf{B} + \mathbf{I}$

(٢) $\mathbf{B} + \mathbf{I}$

(١) $\mathbf{B} + \mathbf{I}$

٨ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ، أثبت أن: المصفوفة \mathbf{I} معكوس جمعي للمصفوفة $2\mathbf{B}$

٩ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$ ،

أوجد قيم: \mathbf{S} ، \mathbf{V} ، \mathbf{E} ، \mathbf{I} ، \mathbf{B}

أوجد قيم: \mathbf{S} ، \mathbf{V} ، \mathbf{E} ، \mathbf{I} ، \mathbf{B}

١٠ إذا كان: $3\mathbf{I} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ ،

أوجد قيمة كل من: \mathbf{S} ، \mathbf{V} ، \mathbf{E} ، \mathbf{I} ، \mathbf{B}

أوجد قيم: \mathbf{S} ، \mathbf{V} ، \mathbf{E} ، \mathbf{I} ، \mathbf{B}

١١ أوجد قيم a, b, c, d التي تحقق المعادلة :

«١٠ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥»

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

«١٠ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥»

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

«١٠ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥»

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 4 - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} 2 \quad (3)$$

١٢ أوجد قيم s, t, u, v التي تحقق أن :

«١٠ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥»

$$2 \times 2 \square = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s$$

١٣ إذا كان $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ ، أوجد قيم s, t, u, v التي تحقق أن :

«١٠ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥»

أوجد قيم s, t, u, v التي تحقق أن :

١٤ إذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$ ، أوجد المصفوفة B :

١٥ إذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$ ، أوجد المصفوفة B :

فأوجد المصفوفة B بحيث $B = 2 - 1$:

١٦ إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$ ، أوجد المصفوفة B بحيث $B = 2 - 1$:

١٧ حل المعادلة المصفوفية : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3B$:

١٨ إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$ ، أوجد المصفوفة B بحيث :

(١) $B = 1 + 2B$ ، (٢) $2B = [1 + 2B]$ ، (٣) $0 = 2 - (1 - 1)$:

(٣) $0 = 2 - (1 - 1)$:

١٩ إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$ ، أوجد المصفوفة B بحيث $B = 2 - 1$:

أوجد المصفوفة B بحيث $B = 2 - 1$:

تالفا مسائل تقبس ميارات التشكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

• (1) إذا كانت A مصفوفة مربعة غير صفرية فإن المصفوفة $A + A^T$ مصفوفة

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (ج) قطرية. (د) صفرية.

• (2) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن المصفوفة $(A - A^T)$ تكون

(أ) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (ج) صفرية. (د) قطرية.

• (3) إذا كان : $A + B = C + D$ فإن(أ) A متماثلة. (ب) B متماثلة.(ج) $(A + B)$ متماثلة. (د) $(A + B)$ شبه متماثلة.• (4) إذا كانت A مصفوفة على النظم 3×3 حيث $A^T = C - B$ ، B مصفوفة على النظم 3×3 حيث $B^T = C - B$ فإن : $A + B = \dots\dots\dots$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ (د) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (ج) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ (ب) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ (أ) }$$

• (5) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 وكان $A = I + A^T$ فإن مجموع عناصر A هو

(أ) 4 (ب) 2 (ج) 1 (د) صفر

• (6) إذا كانت A ، B مصفوفتين على النظم 2×2 وكان $(A + B)$ مصفوفة متماثلة

$$\text{فإن : } \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} = \dots\dots\dots$$

(أ) صفر (ب) 1- (ج) 1 (د) 2

$$\text{2 إذا كانت : } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = S + V , \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = S - V$$

فأوجد المصفوفتين : S ، V

$$\text{3 إذا كانت : } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = A , \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

فأوجد المصفوفة S التي تحقق العلاقة : $3 - A - 2B = S - S^T$

ضرب المصفوفات



مثال تمهيدى

إذا كانت المصفوفة A تعبر عن نتائج ٢٠ مباراة لفريقي الأملى والزمالك فى الدورى العام

$$\text{لكرة القدم حيث : } A = \begin{pmatrix} \text{فوز} & \text{تعادل} & \text{هزيمة} \\ \text{الاملى} & 12 & 6 & 2 \\ \text{الزمالك} & 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

وكانت المصفوفة B تعبر عن عدد النقاط التى يحصل عليها كل فريق فى حالة الفوز

$$\text{والتعادل والهزيمة حيث : } B = \begin{pmatrix} \text{فوز} & 3 \\ \text{تعادل} & 1 \\ \text{هزيمة} & 0 \end{pmatrix}$$

فإن : مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الأملى $= 0 \times 2 + 1 \times 6 + 3 \times 12 = 42$ نقطة

، مجموع النقاط التى حصل عليها فريق الزمالك $= 0 \times 0 + 1 \times 4 + 3 \times 11 = 37$ نقطة

$$\begin{pmatrix} 42 \\ 37 \end{pmatrix} \text{ ويمكن التعبير عن مجموع النقاط التى حصل عليها كل فريق بالمصفوفة ج } =$$

ونلاحظ أن

٤٢ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف الأول من A فى عناصر عمود B

، ٣٧ هى ناتج جمع حواصل ضرب عناصر الصف الثانى من A فى عناصر عمود B

• المصفوفة C هى ناتج ضرب المصفوفة $A \times B$ المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 42 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 6 + 3 \times 12 \\ 0 \times 0 + 1 \times 4 + 3 \times 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} = B \cdot A = C \text{ أى ان ج } =$$

إذا كانت A مصفوفة على النظم $m \times l$ ، B مصفوفة على النظم $n \times m$ فإن :

- حاصل ضربيهما $AB = A$ يكون ممكناً إذا وفقط إذا كان : $n = l$

أي عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B

- المصفوفة $AB = A$ تكون على النظم $m \times n$

$$A \times B = \begin{matrix} \text{مساويان} \\ \text{مساويان} \end{matrix}$$

- كل عنصر c_{ij} في المصفوفة $AB = A$ يساوي مجموع حواصل ضرب عناصر الصف i من A في عناصر العمود j من B عنصراً بعنصر كلاً بنظيره.

ولتوضيح مفهوم عملية ضرب المصفوفات :

$$\text{فمثلاً إذا كانت : } A = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \\ 23 & 13 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \\ 23 & 13 \end{pmatrix}$$

فإن : A مصفوفة على النظم 3×2 ، B مصفوفة على النظم 2×2

وحيث إن : عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة $B = 2$

$$A \times B = \begin{matrix} \text{مساويان} \\ \text{مساويان} \end{matrix}$$

أي إن عملية ضرب المصفوفة A في المصفوفة B تكون ممكنة

وينتج مصفوفة A على النظم 3×2 ونحصل عليها كالآتي :

* نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول في المصفوفة A بالعنصر المناظر في العمود الأول في

المصفوفة B ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود في (الصف الأول والعمود الأول)

في المصفوفة (AB) كما يلي :

$$\begin{pmatrix} \dots & 21 \times 21 + 11 \times 11 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \\ 23 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \\ 23 & 13 \end{pmatrix}$$

* ثم نضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول في المصفوفة A بالعنصر المناظر في العمود الثاني في المصفوفة B ونجمع حواصل الضرب فنحصل على العنصر الموجود في (الصف الأول والعمود الثاني) في المصفوفة (AB)

$$\begin{pmatrix} 22-21+11 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \\ 23 & 13 \end{pmatrix} \text{ كما يلي :}$$

* وهكذا حتى نحصل على جميع عناصر المصفوفة AB كما يلي :

$$\begin{pmatrix} 22-21+11 & 12-21+11 & 12-22+11 \\ 22-22+21 & 12-22+12 & 12-23+13 \\ 22-23+21 & 12-23+13 & 12-24+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 12 \\ 23 & 13 \end{pmatrix} = AB$$

لاحظ أن عملية ضرب المصفوفة B في المصفوفة A تكون غير ممكنة.

أي أن B غير ممكنة لأن عدد أعمدة المصفوفة B \neq عدد صفوف المصفوفة A

مثال ١

أوجد AB إن أمكن في كل مما يأتي :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & . & 1 \end{pmatrix} = A \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & . \end{pmatrix} = B, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & . \end{pmatrix} = A \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = B, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & . & 2 \end{pmatrix} = A$$

الحل

١. \therefore A مصفوفة على النظم 2×3 ، B مصفوفة على النظم 2×2

\therefore عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B = 2

\therefore AB ممكنة وتكون على النظم 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 2 \\ 12 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (1)(2) \\ (3)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (1)(2) \\ (3)(4) + (2)(0) & (0)(4) + (1)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & . \end{pmatrix} = AB$$

٢. \therefore A مصفوفة على النظم 3×2 ، B مصفوفة على النظم 2×2

\therefore عدد أعمدة المصفوفة A \neq عدد صفوف المصفوفة B \therefore AB غير ممكنة.

٣. \therefore A مصفوفة على النظم 3×1 ، B مصفوفة على النظم 1×3

\therefore عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B = 3 \therefore AB ممكنة وتكون على النظم 1×1

$$(7) = ((4)(3) + (1)(1) + (2)(2)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = AB \therefore$$

مثال 2

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ أوجد : $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ إن أمكن.

الحل .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ على النظم } 2 \times 3 \text{ ، } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ على النظم } 2 \times 3$$

∴ عدد أعمدة المصفوفة \mathbf{A} = عدد صفوف المصفوفة \mathbf{B} ∴ $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ممكنة على النظم 2×3 .

$$\therefore \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

حاول بنفسك

$$\text{إذا كانت : } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \text{ ، } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \text{ فأوجد إن أمكن : } \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ ، } \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ ، } \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

خواص عملية ضرب المصفوفات

إذا كانت \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، \mathbf{C} ثلاث مصفوفات ، \mathbf{I} هي مصفوفة الوحدة فإن الخواص الآتية تتحقق :

خاصية الدمج (التسويق)

$(\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})) = (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C})$ حيث عمليات الضرب ممكنة

$$\text{فمثلاً : إذا كانت : } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \text{ ، } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \text{ ، } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \text{ ، } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

$$\text{فإن : } \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 2 \\ 24 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$$

$$\therefore (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})) = (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}) \text{ ، } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{C}$$

$$\therefore (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})) = (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}) \text{ أي أن } \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$$

خاصية وجود المحايد الضربي

مصفوفة الوحدة \mathbf{I} هي المحايد الضربي.

أي أن $\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}$ حيث \mathbf{A} مصفوفة مربعة لها نفس نظم \mathbf{I}

$$\text{فمثلاً } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها

حيث عمليات الضرب والجمع ممكنة. $(A+B)C = AC + BC$ ، $C(A+B) = CA + CB$

فمثلاً إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

$$\text{فإن } (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = AC + BC$$

$$(1) \quad (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} = AC + BC$$

$$(2) \quad (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

∴ من (1) ، (2) ينتج أن : $(A+B)C = AC + BC$

ملاحظة

إذا كانت A ، B مصفوفتين قابلتين للضرب على أي صورة بمعنى أن A ممكنة ، B ممكنة أيضاً.

فإنه ليس من الضروري أن يكون $A = B$

وهذا يعني أن ضرب المصفوفات ليس عملية إبدالية

فمثلاً إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

فإن :

$$(1) \quad (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} = AC + BC$$

$$(2) \quad (A+B)C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} = AC + BC$$

لأنتبه

يمكن ضرب أي مصفوفتين مربعيتين على نفس النظم.

مثال ٣

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ فأوجد قيمة كل من: a ، b

الحل

لاحظ أنه

إذا كانت I مصفوفة غير مربعة فإن a غير ممكنة.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I \times I = I$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = I \times I = I,$$

مثال ٤

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = I$ فأثبت أن: $a = 2$ ، $b = 1$ ، $c = 3$

الحل

لاحظ أن

$$I = I^*$$

$$I^* = I \text{ حيث } \exists \text{ من}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = I - I = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} =$$

حاول بنفسك

إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = I$ فأثبت أن: $a = 1$ ، $b = 2$ ، $c = 3$

تفكير ناقد

١ إذا كانت: $I = A$ ، B مصفوفتين، وكان: $A = B$

فهل هذا يعني دائماً أن: $A = B$ أو $B = A$ ؟

الإجابة: لا

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = I \text{ فإن: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = I, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = I$$

$$I \neq A, I \neq B,$$

أي أنه إذا كانت: $A = B$ فهذا لا يعني دائماً أن: $A = B$ أو $B = A$

٢ إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة وكان $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فهل هذا يعني دائماً أن $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ؟

الإجابة : لا

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{فإن} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أي أن إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فهذا لا يعني دائماً أن : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

٣ إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين وكان : $I = B \times B$ فهل هذا يعني دائماً أن : $I = B$ ؟

الإجابة : لا

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{فإن} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أي أن إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فهذا لا يعني دائماً أن : $I = B$

مدور حاصل ضرب مصفوفتين

إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين وكانت $I = B \times B$ ممكنة فإن : $I = B \times B$

وبصفة عامة : $(I = B \times B) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ بشرط أن تكون عمليات الضرب ممكنة.

مثال ٥

$$\text{إذا كانت : } I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{فحقق أن : } I = B \times B$$

الحل

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

من (١) ، (٢) : $I = B \times B$

مثال 6

$$\begin{pmatrix} 3- & 1- \\ 2 & 5- \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = ج ، \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2- \\ 4 & 7- & 5 \end{pmatrix} = ب ، \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 5 & 3- \end{pmatrix} = ا ،$$

فأوجد المصفوفة سـ التي تحقق العلاقة : $١٥ سـ = ج + ا$

الحل .

$$\begin{pmatrix} 7- & 7 \\ 28 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 5 & 3- \end{pmatrix} = ا :$$

$$\begin{pmatrix} 52 & 1 \\ 13- & 36 \end{pmatrix} = ج + ا : \begin{pmatrix} 36 & 1 \\ 13- & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3- & 1 \\ 2 & 5- \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2- \\ 4 & 7- & 5 \end{pmatrix} - ج ،$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = سـ : \begin{pmatrix} 45 & 8 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 1 \\ 13- & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7- & 7 \\ 28 & 21 \end{pmatrix} = ١٥ سـ :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = سـ :$$

مثال 7

$$\begin{pmatrix} 4 & 7- & 19- \\ 28 & ح & 6 \\ 36 & 12 & 24- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1- \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1- & 5 \end{pmatrix} : \text{أوجد قيم ا ، ب ، ح إذا كان :}$$

الحل .

يمكن إيجاد قيم ا ، ب ، ح دون إجراء عملية الضرب كاملة كالتالي :

نضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

$$١٩- = ٢- \times ٢ + ٧ \times ٩ + ١- \times ١ : \therefore ٢- = ٩ :$$

، نضرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية

$$٢٤- = ٢- \times ب + ٧ \times ١ - ١- \times ٥ : \therefore ٦ = ب :$$

، نضرب عناصر الصف الثاني من المصفوفة الأولى × عناصر العمود الثاني من المصفوفة الثانية

$$٢٤ = ح : \therefore ٢٤ = ٣ \times 4 + 6 \times 2 + 0 \times 0 :$$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية في ضرب المصفوفات وسوف نقوم بعرض ذلك في نهاية الوحدة.



اختر نفسك

مستويات عليا

على ضرب المصفوفات

تمارين

3

من أسئلة الكتاب المدرسي • تخير • فهم • تطبيقات

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كانت A مصفوفة على النظم $m \times n$ ، B مصفوفة على النظم $n \times l$ ، فإن حاصل الضرب AB يكون ممكناً إذا كانت
- (٢) إذا كانت A مصفوفة على النظم 1×3 ، B مصفوفة على النظم 3×1 ، فإن AB مصفوفة على النظم
- (٣) إذا كانت A مصفوفة على النظم 3×2 ، B مصفوفة على النظم 1×2 ، فإن B مصفوفة على النظم
- (٤) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 ، B مصفوفة على النظم 3×1 ، فإن المصفوفة AB تكون على النظم
- (٥) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×1 ، B مصفوفة على النظم 2×3 ، فإن $B^T A^T$ على النظم
- (٦) إذا كانت A مصفوفة على النظم 1×2 ، B مصفوفة على النظم 2×2 ، C مصفوفة على النظم 2×1 ، فإن $(A)C$ على النظم
- (٧) إذا كانت A مصفوفة على النظم 3×1 ، B مصفوفة على النظم 3×1 ، فإنه يمكن إجراء أى من العمليات الآتية ؟

(١) $A+B$ (ب) $B^T + A^T$ (ج) $A^T B$ (د) AB

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$


(١) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\dots = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (9)$$


(1) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

$$\dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (1)$$

(د) غير ممكنة.

(۱۱)  إذا كانت : ۱ ، ب مصفوفتين حيث $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix} = \text{ب}$ فإن : $\text{ب}^{-۱} = \dots\dots\dots$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

(١٢)  إذا كانت : $\binom{2}{2-} = 1$ ، $\binom{2}{2} = 1$ ، $\binom{2}{1} = 2$ فإن : $\binom{2}{-} = \dots$

$$(7) (d) \quad (7-) (\frac{d}{2}) \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{2} & \frac{d}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 1 & \frac{d}{2} \end{pmatrix} (1)$$

(٥٣) إذا كانت : I هي مصفوفة الوحدة فإن : $I^{-1} = I$ (حيث n عدد صحيح موجب)

$${}^{\vee}I(\omega) \qquad \qquad \qquad {}^{\vee}I(1)$$

(ج) I

(١٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٢- & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $١ = \dots\dots\dots$

$$y \times y \boxed{} (d) \qquad y \times y \boxed{} (e) \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ y & -y \end{pmatrix} (f) \qquad \begin{pmatrix} 1 & y \\ y & x \end{pmatrix} (g)$$

(15) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 9$ فإن : $..... = 9$

λ (J) λ (J) λ (J) λ (J)

(٦٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = 9$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 6$ ، $\begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} = 1 \times 6$ ، فإن : $س + ص = \dots\dots\dots$

$$q(\downarrow) \quad V(\frac{\uparrow}{\downarrow}) \quad o(\downarrow) \quad \tau(1)$$

(۱۷) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$ فإن: $ص + ح = \dots$

١- (ج) ٢- (ج) ٣ (ب) ٤- (ب)

(۱۸) إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$ فإن: $1 - 2 = \dots$

I 0 (ج) I ۲ (ع) (ب) I (i)

(١٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S^{-1}$ فإن : $S^{-1} = S^{-1} + S^{-1} = \dots$

(١) ١٢ I (ب) ١٨ I (ج) ٩ S (د) ١٢ S

(٢٠) إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ فإن : $S = \dots$

(١) ٣ (ب) ٤ (ج) ٣- (د) ٤-

(٢١) إذا كانت S مصفوفة بحيث $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فإن S يمكن أن تكون \dots

(١) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ فإن : $S = \dots$

(١) ٥ (ب) ٣ (ج) ٥- (د) ٣-

(٢٣) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S$ ، وكان : $S^{-1} + S = \dots$

(١) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(٢٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = A$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = C$ فإن : $A + B + C = \dots$

(١) $\begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 27 & 15 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٥) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (حيث $0 = 1$)

(١) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (د) غير ممكنة.

(٢٦) $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$

(١) I (ب) $I -$ (ج) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(٢٧) إذا كانت : $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ فإن مجموع عناصر المصفوفة (S^{-1}) يساوي \dots

(١) ١٣ (ب) ٢٩ (ج) ٤٧ (د) ٦٥

(٢٨) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ وكان $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ فإن : $A + B = \dots$

(١) صفر (ب) ٤- (ج) ٤ (د) ١٦

(٣٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ فإن : $\square =$
 (أ) -٤ (ب) -١ (ج) ١ (د) ٤

(٣٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكان : $I \times B = B - I$ فإن : $B =$

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

(٤٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = I$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ وكان : $I \times S = S + I$ فإن : $S =$

(أ) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(٤١) إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكان : $I^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فإن : $S =$
 حيث $S \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٤٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = I$ فإن : $I^{2020} =$

(أ) I (ب) I (ج) I^{-1} (د) I^{-2}

(٤٣) إذا كانت : $S = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$ حيث $\theta > 0$ وكانت $\frac{\pi}{4} = I^{-1}$

فإن قيمة θ التي تحقق ذلك =

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٤٤) إذا كانت I ، B ، C ثلاث مصفوفات مربعة من نفس النظم :

(١) إذا كان : $I = B$ فإن : $I = C$ (٢) إذا كان : $I = C$ فإن : $I = B$

أي الخيارات الآتية صحيحة ؟

(١) (١) صحيح بينما (٢) خطأ.

(ج) كل من (١) ، (٢) صحيح.

(٤٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ وكانت الدالة d معرفة على مجموعة المصفوفات المربعة حيث

$d(S) = (I + S)(I - S)$ فإن : $d(I) =$

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

• (٤٦) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث كان : $I = A - A^2$ فإن : $A^2 = \dots$

- (١) $I^2 + A$ (ب) $I + A^2$ (ج) $I + A$ (د) $I^2 + A^2$

• (٤٧) إذا كانت A مصفوفة مربعة حيث : $A = A^2$ فإن : $(I + A)^2 = \dots$

- (١) $I^2 + A$ (ب) $I^2 + I$ (ج) $I + A^2$ (د) $A + I^2$

• (٤٨) إذا كانت A ، B مصفوفتان على النظم 2×2 أي مما يأتي يكون صحيح دائماً ؟

(١) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ (ب) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2BA$

(ج) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB + 2BA$ (د) $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

• (٤٩) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $A = A^2$ فإن لكل m عدد طبيعي يكون $A^{m+1} = \dots$

- (١) I (ب) \square (ج) A (د) $A - I$

• (٥٠) إذا كانت A مصفوفة مربعة حيث $I = A^2$ فإن : $A = A^4$ عندما m عدد

- (١) طبيعي. (ب) طبيعي زوجي.
(ج) طبيعي فردي. (د) طبيعي يقبل القسمة على ٣

• (٥١) إذا كانت A مصفوفة وكان : $A^3 = A$ فإن B تكون

- (١) متماثلة. (ب) شبه متماثلة.
(ج) مصفوفة الوحدة I (د) المصفوفة الصفرية \square

• (٥٢) إذا كانت كل من A ، B مصفوفة متماثلة فإن المصفوفة $(A + B)$ تكون

- (١) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (ج) قطرية. (د) مثلثية.

• (٥٣) إذا كانت A ، B مصفوفتان متماثلتان فإن المصفوفة $(A - B)$ تكون

- (١) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (ج) قطرية. (د) صفرية.

• (٥٤) إذا كانت A ، B مصفوفتين متماثلتين فإن $(A + B)$ مصفوفة متماثلة إذا كان

- (١) $I = A + B$ (ب) $A = B$ (ج) $A + B = A$ (د) جميع ما سبق.

• (٥٥) إذا كانت المصفوفة $(A + B)$ متماثلة فإن ذلك يشترط أن تكون

- (١) A متماثلة. (ب) A شبه متماثلة.
(ج) B متماثلة. (د) B شبه متماثلة.

• (٥٦) إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times B$ فإن كلاً من المصفوفتين A ، B على النظم

- (١) 2×2 (ب) 3×3 (ج) 3×2 (د) 2×2

الأسئلة المقالية

١ أوجد مصفوفة حاصل الضرب في كل مما يأتي (إن أمكن) مبيّنًا نظم المصفوفة الناتجة :

| | |
|---|--|
| $(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix})$ (٢) | $(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix})$ (١) |
| $(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix})$ (٤) | $(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ (٣) |
| $(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ (٦) | $(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix})$ (٥) |
| $(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ (٨) | $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ (٧) |
| $(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix})$ (١٠) | $(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix})$ (٩) |
| $(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix})$ (١٢) | $(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}) (\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix})$ (١١) |

٢ إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \text{أ}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \text{ب}$ فأوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\text{أ} + \text{ب}$ (٢) $\text{أ} - \text{ب}$ (٣) $\text{أ} + \text{ب}$

٣ إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \text{أ}$ ، $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \text{ب}$ فأوجد : $\text{أ} + \text{ب}$ ، $\text{أ} - \text{ب}$ ، $\text{أ} \cdot \text{ب}$

٤ إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{س}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{ص}$ فأوجد قيمة : $\text{س} - \text{ص}$

٥ إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{أ}$ ، $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \text{ب}$

فأثبت أن : $\text{أ} = \text{ب}$

٦ إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{أ}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{ب}$ حقق أن : $\text{أ} = \text{ب}$

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = I$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = I$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = I$

فحقق أن: $a(b+c) = (b+c)a$

إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{E}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{U}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{P}$

فحقق كلاً مما يأتي: (١) $f(1) = f(1)$ (٢) $f(1) = f(1)$

إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = {}^m(B+I)$ ، فلو وجد $(B+I)^m$

إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1- & 2- & 1- \\ 7 & 12 & 7 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1- & 1 & 1 \\ 4 & 2- & 2 \\ 2 & 2- & 2 \end{pmatrix}$

فَيَنْ أُن : أ = بينما ب ≠

١١ إذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

حَقَّقْ أَنْ : (أَبْج) = ج مَبْدُأٌ مَدَّ

12 إذا كانت: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ فاجبت أن: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = I_{22} + 10 = 1$

أوجد x, y, z ، ع التي تحقق: $\begin{pmatrix} 13- & ع & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1- & س \\ ص & 1 \end{pmatrix}$

١٤ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$



أوجد قيمة كل من s ، u التي تجعل : $ab = ba$

١٥ إذا كانت : $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ أوجد قيمة كل من s ، v التي تحقق المعادلة :

 $\mu^* \in \Sigma_N$
$$\square = I_{\text{ص}} + \text{م} - \text{م}^2$$

١٦ إذا كانت: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ ، $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ ، $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

فأوجد المصفوفة S التي تحقق العلاقة : $٢S = ١ + (م ج)^٢$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$ ، فإن : $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$
 (أ) $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ وكان : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ فإن : $1 + 1 + 1 + 1 = \dots$
 (أ) ١٩ (ب) ٢٧ (ج) ٢٩ (د) ٣٦

(٣) إذا كانت ل ، م هما جذرا المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، فإن :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت كل من المصفوفتين $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ليست مصفوفة صف أو مصفوفة عمود وكان عدد عناصر المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 10$ وعدد عناصر المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 6$ وكان : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ يمكن فإن عدد عناصر المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ يساوي

(أ) ٦٠ (ب) ١٦ (ج) ١٥ (د) ٦

(٥) إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين مربعيتين على نفس النظم فإن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ إذا كان

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ حيث n عدد صحيح موجب.

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٨) إذا كان : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن :

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ج) ليس من الضروري أن يكون $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) جميع ما سبق خطأ

١ (٩) إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ وكان $\begin{pmatrix} 22 & 22 \\ 22 & 22 \end{pmatrix} = 5I$ فإن $\dots = 5$

(١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

١٠ (١٠) إذا كانت I مصفوفة على النظم 2×2 وكان $I^2 = I$ ، $I^2 + I = I$ ، $I^2 + I = I$ فإن $\dots = I + M$

(١) ٢٠ (ب) ١٧ (ج) ١١ (د) ٦

١١ (١١) إذا كانت I مصفوفة مربعة على النظم 2×2 ، $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times I$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times I$ فإن $\dots = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times I$

(١) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

٢ إذا كان $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = I$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = I$ فإن $\dots = I + I$

فأوجد المصفوفة S التي تحقق أن $S = (I + I)$

٣ إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = S$ أوجد I ، إذا كان $S^2 = S + I$ فإن $\dots = S + I$

٤ إذا كانت $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ، $S^2 = S + I$ ، $S^2 = S + I$ فإن $\dots = S + I$ فاثبت أن S مصفوفة متماثلة.

٥ إذا كانت $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = S$ فاثبت أن $S^{2014} = I$

تطبيق حياتي

٦ الربط بالسياحة : لدى شركة سياحية ٣ فنادق بمدينة الغردقة

، يبين الجدول المقابل عدد الغرف المختلفة في كل فندق ،

فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحتوى على سرير واحد

٢٥٠ جنيهاً ، والغرفة التي تحتوى على سريرين ٤٥٠ جنيهاً ،

والجناح ٦٠٠ جنيهاً.

| الفندق | غرفة بسرير | غرفة بسريرين | جناح |
|---------|---------------|-----------------|------|
| الزهرة | ٢٨ | ٦٤ | ٨ |
| اللؤلؤة | ٣٥ | ٩٥ | ٢٠ |
| الماسة | ٢٠ | ٨٠ | ١٥ |

(١) اكتب مصفوفة تمثل عدد الغرف المختلفة في الثلاثة فنادق ، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف.

(٢) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للشركة ، على فرض أن جميع الغرف تم شغلها.

(٣) ما الدخل اليومي للشركة على فرض أن جميع الغرف تم شغلها ؟

المحددات



محدد الرتبة الثانية

إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{ح} \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم 2×2 حيث $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{ح} \end{pmatrix} = 1$

فإن : محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{ح} \end{pmatrix}$ يرمز له بالرمز $|1|$

ويسمى بمحدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرف كالآتي : $|1| = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{ح} \end{vmatrix} = \text{ب} \cdot \text{ح} - \text{س} \cdot \text{أ}$

أي أن : قيمة محدد الرتبة الثانية تساوي حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحاً منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر.

مثال ١

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} \theta \text{ حأ} & \theta \text{ حأ} \\ \theta \text{ حأ} & \theta \text{ حأ} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4- & 8- \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7- & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$1 = 15 - 16 = 5 \times 3 - 8 \times 2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$28 = 14 + 24 = (7-) \times 2 - 6 \times 4 = \begin{vmatrix} 7- & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{صفر} = 24 + 24- = 3 \times (8-) - (4-) \times 6 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4- & 8- \end{vmatrix}$$

$$1 - \theta \text{ حأ} + \theta \text{ حأ} = \theta \text{ حأ} \times (\theta \text{ حأ} -) - \theta \text{ حأ} \times \theta \text{ حأ} = \begin{vmatrix} \theta \text{ حأ} & \theta \text{ حأ} \\ \theta \text{ حأ} & \theta \text{ حأ} \end{vmatrix}$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة كل محدد مما يلي : $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

مثال 2

أوجد قيمة s التي تحقق كلا من المعادلتين الآتيتين :

$$\begin{vmatrix} 1 & s-2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad \begin{vmatrix} 2 & s+2 \\ s-2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & s-2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 1 \times (s-2) = 0 \Rightarrow s-2 = 0 \Rightarrow s = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & s+2 \\ s-2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (s+2)(s-2) = 0 \Rightarrow 4 - (s^2 - 4) = 0 \Rightarrow 4 - s^2 + 4 = 0 \Rightarrow 8 - s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 8 \Rightarrow s = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & s+2 \\ s-2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (s+2)(s-2) = 0 \Rightarrow 4 - (s^2 - 4) = 0 \Rightarrow 4 - s^2 + 4 = 0 \Rightarrow 8 - s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 8 \Rightarrow s = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & s+2 \\ s-2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (s+2)(s-2) = 0 \Rightarrow 4 - (s^2 - 4) = 0 \Rightarrow 4 - s^2 + 4 = 0 \Rightarrow 8 - s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 8 \Rightarrow s = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore s = 2 \text{ أو } s = -2 \text{ (حيث : } s = 1 \text{)}$$

حاول بنفسك

أوجد قيمة s التي تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} 2 & s \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$

الرتبة الثالثة

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{pmatrix} = 0 \text{ حيث } 3 \times 3 \text{ حيث } 1$$

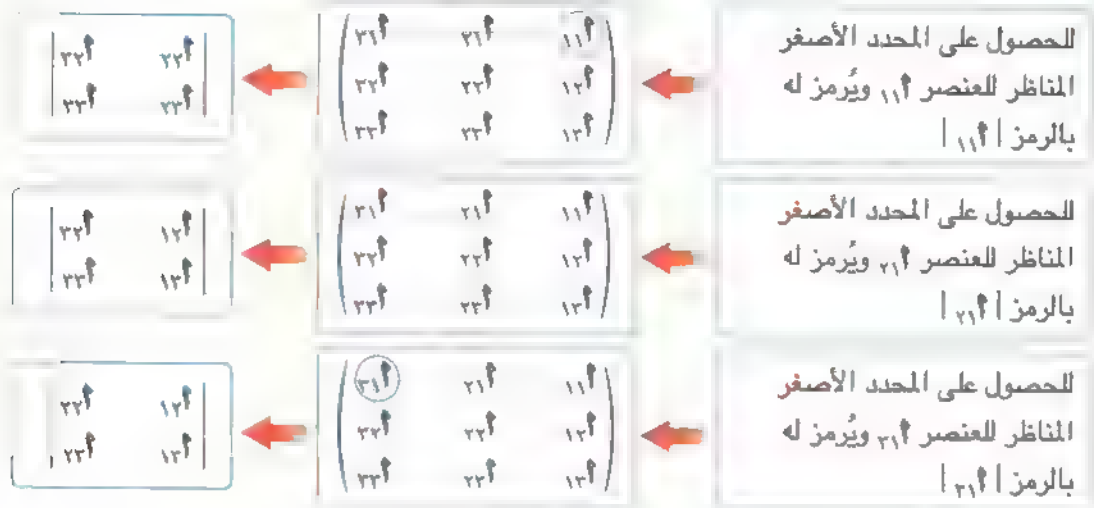
فإن : محدد المصفوفة A يرمز له بالرمز $|A|$

$$\begin{vmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{vmatrix} = 0 \text{ حيث : } 3 \times 3 \text{ حيث } 1$$

وقبل التعرف على كيفية فك محدد الرتبة الثالثة سنتعرف أولاً على «المحدد الأصغر» المناظر لأي عنصر في المصفوفة A وكيفية تحديد إشارته.

لكل عنصر في المصفوفة A محدد أصغر يمكن الحصول عليه بحذف الصف والعمود المتقاطعين على هذا العنصر.

فمثلاً يمكن الحصول على المحدد الأصغر المناظر لكل عنصر من عناصر الصف الأول كما يلي :



• ويمكن تحديد إشارة أى محدد أصغر لعنصر ما فى المصفوفة بأن :

نجمع رتبة الصف ورتبة العمود الذين يتقاطعان عند هذا العنصر فإذا كان مجموع الرتبتين :

- زوجياً : كانت الإشارة موجبة. - فردياً : كانت الإشارة سالبة.

فمثلاً

- إشارة | ١١١ | موجبة لأن : $١ + ١ = ٢$ (زوجى)

- إشارة | ٢١١ | سالبة لأن : $٢ + ١ = ٣$ (فردي)

- إشارة | ٣١١ | موجبة لأن : $٣ + ١ = ٤$ (زوجى)

• وعلى هذا يمكن كتابة قاعدة الإشارات

للمحدد الأصغر كما بالشكل المقابل :

| | | |
|---|---|---|
| + | - | + |
| - | + | - |
| + | - | + |

لاحظ أن

إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر

أمر ع تتعين بالقاعدة : $(-1)^{ع+ص}$

فك محدد الرتبة الثالثة

يمكن فك محدد الرتبة الثالثة بدلالة عناصر أى صف أو أى عمود ومحدداتها الصغرى وباستخدام قاعدة الإشارات السابق ذكرها.

فمثلاً إذا كان : $\begin{vmatrix} ٢١١ & ٢١١ & ١١١ \\ ٣٢١ & ٢٢١ & ١٢١ \\ ٣٣١ & ٢٣١ & ١٣١ \end{vmatrix} = | ١ |$ فإن :

• $\begin{vmatrix} ٢٢١ & ٢٢١ \\ ٢٣١ & ٢٣١ \end{vmatrix} = | ١ | = \begin{vmatrix} ٢٢١ & ٢٢١ \\ ٢٣١ & ٢٣١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٢٢١ & ١٢١ \\ ٢٣١ & ١٣١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢٢١ & ١٢١ \\ ٢٣١ & ١٣١ \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر الصف الأول)

• $\begin{vmatrix} ٢٢١ & ٢٢١ \\ ٢٣١ & ٢٣١ \end{vmatrix} = | ١ | = \begin{vmatrix} ٢٢١ & ٢٢١ \\ ٢٣١ & ٢٣١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢٢١ & ١٢١ \\ ٢٣١ & ١٣١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٢٢١ & ١٢١ \\ ٢٣١ & ١٣١ \end{vmatrix}$ (باستخدام عناصر العمود الثانى)

مثال ٣

$$\begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2- \\ 3- & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ أوجد قيمة المحدد :}$$

الحل

باستخدام عناصر الصف الأول نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2- \\ 3- & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2- \\ 3- & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 + \begin{vmatrix} 4 & 2- \\ 3- & 1 \end{vmatrix} \cdot 3 - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3- & 1 \end{vmatrix} \cdot 2 =$$

$$= (0 \times 1 - 1 \times 2-) - (4 \times 1 - (3-) \times 2-) \cdot 3 - (4 \times 1 - (3-) \times 0) \cdot 2 =$$

$$12- = 2 + 2 \times 3 - (4-) \times 2 = (0 - 2-) - (4 - 6) \cdot 3 - (4 - 0) \cdot 2 =$$

ملاحظة

يمكن فك المحدد باستخدام أى صف أو أى عمود كما ذكرنا وسوف نقوم هنا بفكه مرة أخرى باستخدام عناصر العمود الثانى مع مراعاة قاعدة الإشارات.

$$\begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2- \\ 3- & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2- \\ 3- & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 3- + \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 4 & 2- \end{vmatrix} \cdot 1 - \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 4 & 2- \end{vmatrix} \cdot 1 + \text{صفر} =$$

$$= ((1-) \times (2-) - 4 \times 2) - \text{صفر} + (4 \times 1 - (3-) \times 2-) \cdot 3- =$$

$$12- = 6 - 2 \times 3- = (2 - 8) - (4 - 6) \cdot 3- =$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقاً (حاول بنفسك استخدام أى صف أو أى عمود آخر)

مثال ٤

$$\begin{vmatrix} 3 & 1- & 4 \\ 2- & 0 & 0 \\ 1- & 3- & 0 \end{vmatrix} \text{ أوجد قيمة المحدد :}$$

الحل

يفضل فك هذا المحدد بدلالة عناصر العمود الأول لوجود أكبر عدد من الأصفار

$$\therefore \text{ قيمة المحدد} = 4 = \begin{vmatrix} 2- & 0 \\ 1- & 3- \end{vmatrix} \cdot 3 - \begin{vmatrix} 3 & 1- \\ 2- & 0 \end{vmatrix} \cdot 1- + \begin{vmatrix} 3 & 1- \\ 2- & 0 \end{vmatrix} \cdot \text{صفر} =$$

$$= 4 = (1-) \times (3-) - (1-) \times 0 - ((2-) \times (3-) - (1-) \times 0) \cdot 3 =$$

حاول بنفسك

$$\begin{vmatrix} 0- & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2- \\ 6 & 3- & 7 \end{vmatrix} \text{ أوجد قيمة المحدد :}$$

١ لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب.

• وبمعنى آخر: قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة.

أى أن: إذا كانت: A مصفوفة مربعة فإن: $|A| = |A^T|$

$$\text{فمثلاً: } \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 3 & 14 & 8 \end{vmatrix}$$

ويمكن التحقق من ذلك بإيجاد مفكوك كل من المحددين كالاتى:

$$22 = 5 \times 0 + (14 - 9) \times 3 + 98 \times 1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 3 & 14 & 8 \end{vmatrix} \quad (\text{باستخدام عناصر الصف الأول})$$

$$22 = (21 - 9) \times 8 + (14 - 9) \times 4 - 98 \times 1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{باستخدام عناصر الصف الأول})$$

٢ قيمة المحدد تنعدم فى الحالات الآتيتين:

① إذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) من المحدد تساوى صفر

$$\text{فمثلاً: قيمة المحدد} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر لأن جميع عناصر العمود الثالث (٢, ٤) أصفار}$$

② إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى المحدد:

$$\text{فمثلاً: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{صفر لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثالث}$$

، واختصاراً تكتب لأن $(ص_1 = ص_2)$

٣ إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

$$\text{فمثلاً: إذا كان } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = |A| \text{ بأخذ ٢ عامل مشترك من عناصر الصف الثانى (ص}_2) \text{}$$

$$\therefore |A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} \text{ وبملاحظة تساوى عناصر الصفين الأول والثانى (ص}_1 = ص_2) \text{}$$

$$\therefore |A| = 2 \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

ملاحظات

١ من الخاصية (٣) نجد أن ضرب المحدد في عدد حقيقي $\neq 0$ فإننا نضرب هذا العدد في عناصر أى صف (عمود) واحد فقط.

$$\text{فمثلاً: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ وهكذا}$$

٢ تنعدم قيمة المحدد إذا كانت عناصر أى صف (عمود) مضاعفات لعناصر صف (عمود) آخر في المحدد

$$\text{فمثلاً: قيمة المحدد} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 15 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن كل عنصر في العمود الأول ٢ أمثال نظيره من العمود الثالث واختصاراً تكتب $(ع, ٣ = ع٢)$

٤ إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن : قيمة المحدد الناتج = - قيمة المحدد الأصلي.

$$\text{فمثلاً: إذا كانت } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 10 \text{ فإذا بدلنا موضعى الصفين الأول والثاني (ص, ص)}$$

$$\text{فإن: } \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -10$$

$$\text{أى أن: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة المحدد بفكه في الحالتين.

محدد المصفوفة المثلثة

المصفوفة المثلثة

هى مصفوفة جميع عناصرها التى تحت القطر الرئيسى (أو فوقه) أصفار.

$$\text{مثل: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

قيمة محدد المصفوفة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي.

$$\text{أي أن } \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\text{الإثبات } \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} = 0 - 22 \times 11 = 22 \times 0 - 33 \times 11 = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\text{باستخدام عناصر العمود الأول } \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} = (0 \times 22 - 33 \times 22) - 11 \times 11 =$$

$$\text{وعلى هذا فإن : } \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} = 10 = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix} = 10 = 7 \times (3 - 2) \times 2 = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 22 & 33 & 11 \\ 33 & 11 & 22 \end{vmatrix}$$

تحقق من فهمك

$$\text{أوجد قيمة المحدد : } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

مثال ٥

$$\text{حل المعادلة الآتية : } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

بفك المحدد :

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

حاول بنفسك

$$\text{حل المعادلة : } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال 6

إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 وكان $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ أوجد $|A|$.

الحل

(١) نفرض أن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

(٢) $\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

من (١) ، (٢) ينتج أن $|A| = 0$ ، $0 = 2 \times 2 = 4$

• من المثال السابق يمكن استنتاج الملاحظات التالية :

ملاحظات

١ إذا كان A مصفوفة على النظم $n \times n$ ، $A \in \mathbb{R}$ فإن $|A| = 0$ فمثلاً :

* إذا كان A مصفوفة على النظم 2×2 وكان $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

فإن $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

* إذا كان A مصفوفة على النظم 3×3 وكان $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

فإن $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

٢ إذا كان A ، B مصفوفتين مربعيتين بحيث $A = B$ فإن $|A| = |B|$

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

يمكن استخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح مثلث باستخدام إحداثيات رؤوسه كما يلي :

إذا كان $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ حيث $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

فإن : مساحة سطح ΔABC هي $|A|$

تنويه

$|A|$ تعني مقياس A
(أي قيمة A الموجبة فقط).

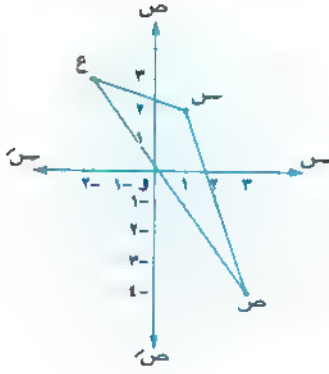
حيث $A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

الإحداثيات الصادية
لرؤوس المثلث

الإحداثيات السينية
لرؤوس المثلث

وسوف نعرض في نهاية هذا الدرس إثبات القانون السابق كنشاط إثرائي.

مثال ٧



أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث المقابل الذي

إحداثيات رؤوسه س (١ ، ٢)

، ص (٣ ، -١) ، ع (-٢ ، ٤)

الحل

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

وباستخدام عناصر العمود الثالث :

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

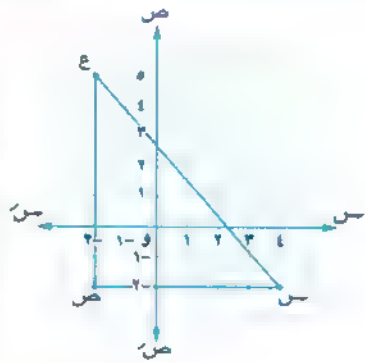
$$= -8 = (10 - 7 - 1) \cdot \frac{1}{2} = [(6 - 4) + (4 + 3) - (8 - 9)] \cdot \frac{1}{2} =$$

\therefore مساحة Δ س ص ع $= |D| = |-8| = 8$ وحدة مربعة

لاحظ أننا استخدمنا عناصر العمود الثالث في فك المحدد لأنها الأسهل في إجراء العمليات الحسابية لوجود الواحد الصحيح.

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



س ص ع مثلث حيث : س (١ ، ٢)

، ص (٣ ، -١) ، ع (-٢ ، ٤)

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح Δ س ص ع

وتأكد من صحة الحل باستخدام قانون حساب مساحة المثلث.

ملاحظة

لإثبات أن ثلاث نقاط س (١ ، ٢) ، ص (٣ ، -١) ، ع (-٢ ، ٤) تقع على استقامة واحدة

$$\text{باستخدام المحددات ثبت أن : } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

مثال ٨

أثبت باستخدام المحددات أن : النقط $(-2, 4)$ ، $(3, 0)$ ، $(8, -4)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل

$$\therefore \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -8 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -8 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \therefore$$

$$= (-12 - 24 + 12) = (-12 - 0) + (22 - 8) - (0 - 12) =$$

\therefore النقط $(-2, 4)$ ، $(3, 0)$ ، $(8, -4)$ تقع على استقامة واحدة.

حاول بنفسك

أثبت باستخدام المحددات أن النقط : $(4, 4)$ ، $(2, 1)$ ، $(-2, 0)$ تقع على استقامة واحدة.

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

أولاً : حل أنظمة المعادلات الخطية في مجهولين

• حل نظام من المعادلات الخطية في مجهولين يُقصد به إيجاد قيم المجهولين الذين يحققان المعادلتين معاً.

$$٢س + ٣ص = م$$

• إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في مجهولين كالتالي :

$$٣س + ٤ص = ن$$

فإنه لحل هذا النظام نتبع ما يأتي :

١- نوجد قيم ثلاثة محددات وذلك بعد وضع المعادلتين على الصورة السابقة ، وهذه المحددات هي :

• يسمى محدد مصفوفة المعاملات ويُرمز له بالرمز Δ ويُقرأ (دلتا)

• نحصل عليه بوضع معاملى س فى المعادلتين فى العمود الأول ، ومعاملى ص فى المعادلتين فى العمود الثانى.

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

• يسمى محدد المجهول س ويُرمز له بالرمز Δ_s ويُقرأ (دلتا س)

• نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الأول (معاملى س) بالثابتين م ، ن

$$\begin{vmatrix} م & ٣ \\ ن & ٤ \end{vmatrix}$$

• يسمى محدد المجهول ص ويُرمز له بالرمز Δ_v ويُقرأ (دلتا ص)

• نحصل عليه من محدد المعاملات Δ وذلك بتغيير عنصرى العمود الثانى (معاملى ص) بالثابتين م ، ن

$$\begin{vmatrix} ٢ & م \\ ٣ & ن \end{vmatrix}$$

٢] نوجد قيمة س ، وقيمة ص كما يأتي (بفرض أن : $\Delta \neq 0$) :

$$س = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} م & ن \\ س & ح \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} م & ن \\ س & ح \end{vmatrix}} = \frac{م - س ن}{س - س ح}$$

$$ص = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} م & ن \\ ح & س \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} م & ن \\ س & ح \end{vmatrix}} = \frac{م - ح ن}{س - س ح}$$

لاحظ أنه إذا كان : $\Delta \neq 0$ صفر فإن للنظام حلًا وحيدًا

أما إذا كان : $\Delta = 0$ صفر فإن للنظام عدد لانهائي من الحلول أو ليس له حل والمثال التالي يوضح الخطوات السابق ذكرها.

مثال ٩

حل بطريقة كرامر المعادلتين الآتيتين : $6س - 5ص = 23$ ، $3س + 2ص = 16$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (-15) = 27$$

$$س = \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 23 & -5 \\ 16 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{46 - (-80)}{27} = \frac{126}{27} = 6$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} = 96 - 6 = 90$$

ملاحظة

يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض في كل من المعادلتين بقيمة س ، وقيمة ص

$$\therefore س = \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{126}{27} = 6 ، \frac{1}{3} = \frac{11}{33} = \frac{\Delta_v}{\Delta}$$

وتكون مجموعة الحل = $\left\{ \left(6 , \frac{1}{3} \right) \right\}$

حاول بنفسك

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام طريقة كرامر : $4س + 3ص = 4$ ، $3س - 2ص = 2$

حل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل كالآتي :

$$\boxed{1} \quad ١٩س + ٣ص + ٤ع = م \quad | \quad \boxed{2} \quad ١٩س + ٣ص + ٤ع = ن$$

$$\boxed{3} \quad ١٩س + ٣ص + ٤ع = ل$$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه في حالة نظام معادلتين خطيتين في مجهولين يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١٩ & ٣ & ٤ \\ ١٩ & ٣ & ٤ \\ ١٩ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = \text{محدد المعاملات}$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} ١٩ & ٣ & م \\ ١٩ & ٣ & ن \\ ١٩ & ٣ & ل \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول س}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن ، ل

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} ١٩ & م & ٤ \\ ١٩ & ن & ٤ \\ ١٩ & ل & ٤ \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ص}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثاني (معاملات ص) بالثوابت م ، ن ، ل

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} ١٩ & ٣ & م \\ ١٩ & ٣ & ن \\ ١٩ & ٣ & ل \end{vmatrix} = \text{محدد المجهول ع}$$

ونحصل عليه بتغيير عناصر العمود الثالث (معاملات ع) بالثوابت م ، ن ، ل

$$\text{وبفرض أن } \Delta \neq 0 \text{ صفر فإن : } \frac{\Delta_s}{\Delta} = س ، \frac{\Delta_v}{\Delta} = ص ، \frac{\Delta_e}{\Delta} = ع$$

والمثال التالي يوضح الخطوات السابقة.

مثال ١٠

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

$$٣ص + ٢س = ١ + ع ، ٣س + ٢ع = ٨ - ٥ص ، ٣ع - ١ = ٢ص - ٣س$$

الحل

١ نضع نظام المعادلات على الصورة : $١٩س + ٣ص + ٤ع = م$ كالآتي :

$$٢ص + ٣س - ع = ١ ، ٣س + ٢ع + ٥ص = ٨ ، ٢ص - ٣س - ع = -١$$

٢ نوجد كلاً من : Δ ، $\Delta_{ص}$ ، $\Delta_{س}$ ، $\Delta_{ع}$ كالتالي :

$$(0-6-)(1-)+(2-9-)-3-(4+10-)-2=\begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3- & 2- & 1 \end{vmatrix}=\Delta$$

$$22=11+33+22=$$

$$(0+16-)(1-)+(2+24-)-3-(4+10-)-1=\begin{vmatrix} 1- & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3- & 2- & 1- \end{vmatrix}=\Delta_{ص}$$

$$66=11+66+11=$$

$$(8-3-)(1-)+(2-9-)-1-(2+24-)-2=\begin{vmatrix} 1- & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3- & 1- & 1 \end{vmatrix}=\Delta_{ص}$$

$$22=-=11+11+44=-$$

$$(0-6-)-1+(8-3-)-3-(16+0-)-2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 2 \\ 1- & 2- & 1 \end{vmatrix}=\Delta_{ع}$$

$$44=11-33+22=$$

٣ نوجد قيم المجاهيل $ص$ ، $ع$ ، $س$ كالتالي :

$$2=\frac{44}{22}=\frac{ع}{\Delta}=ع ، 1-=-\frac{22-}{22}=-\frac{\Delta_{ص}}{\Delta}=ص ، 3=\frac{66}{22}=\frac{\Delta_{س}}{\Delta}=س$$

وتكون مجموعة الحل = $\{(2, 1-, 3)\}$

ملاحظات

- يمكنك التأكد من صحة الحل بالتعويض عن المجاهيل الثلاثة في كل معادلة.
- يُسمى $(2, 1-, 3)$ ثلاثي مرتب.

حاول بنفسك

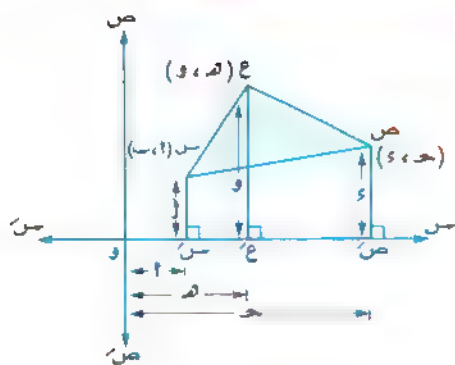
حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

$$2ص + ع - 3 = س ، س + ص - 1 = ع ، س = 2ص + 3ع + 4$$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد قيمة المحدد وسوف نقوم بعرض ذلك في نهاية الوحدة.

نشاط 1 طريقة الإنجاب قانون إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات



بفرض أن س ص ع مثلث حيث :

س (١، ب)، ص (س، ح)، ع (و، هـ) فإن :

مساحة Δ س ص ع

= مساحة شبه المنحرف س س ع ع

+ مساحة شبه المنحرف ع ع ص ص

- مساحة شبه المنحرف س س ص ص

$$= \frac{و+ب}{٢} (١-ح) - \frac{س+و}{٢} (ح-هـ) + \frac{و+ب}{٢} (١-هـ)$$

$$= \frac{١}{٢} [(١-ح) (س+ب) - (ح-هـ) (س+و) + (١-هـ) (و+ب)]$$

$$= \frac{١}{٢} [١-ح-س-ح+١-هـ-هـ-هـ-هـ+١-هـ-هـ-هـ+١-هـ-هـ-هـ+١-هـ-هـ-هـ]$$

$$(١) \quad \frac{١}{٢} [١-ح-س-ح-١-هـ-هـ-هـ+١-هـ-هـ-هـ+١-هـ-هـ-هـ+١-هـ-هـ-هـ]$$

وبفك المحدد $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ ١ & س & ٥ \\ ١ & و & هـ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثالث نجد أن :

$$\text{المحدد} = \frac{١}{٢} \left[\begin{vmatrix} ١ & ب \\ ١ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & و \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & و \end{vmatrix} \right]$$

$$(٢) \quad \frac{١}{٢} = [١-و-٥-٥+١+و+١-٥-٥+١-و-٥-٥]$$

وبمقارنة الناتج الذي حصلنا عليه في (١) ، والناتج الذي حصلنا عليه في (٢) نجد أن :

$$\text{مساحة } \Delta \text{ س ص ع} = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ ١ & س & ٥ \\ ١ & و & هـ \end{vmatrix} \quad (\text{بشرط أخذ القيمة المطلقة للناتج})$$



اقترب نفسك

مستويات عليا

على المحددات

تمارين

4

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) ٢٩ (ب) ١ (ج) ١- (د) ١١

(٢) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 2- & 2- \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) ٨- (ب) ٨ (ج) صفر (د) ١٠

(٣) قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1- \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) ١٠ (ب) ٣٠ (ج) ١٥ (د) ٥

(٤) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} 1- & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0- & 3 & 2 \end{pmatrix} = 0$ فإن : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) ٨ (ب) ٨- (ج) ٢٠ (د) ٢٠-

(٥) $\begin{vmatrix} 0 & 1- & 1 \\ 2 & 1- & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2- \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) صفر (ب) ١ (ج) ١- (د) ٢٩-

(٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2- & 2 \\ 4 & 1- \end{pmatrix} = 0$ فإن : $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dots\dots\dots$

(١) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

(٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ فإن : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ١

(٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} 2 & 2- & 2 \\ 2+ & 3- & 2 \end{vmatrix} = 1$ فإن : $\begin{vmatrix} 2 & 2- & 2 \\ 2+ & 3- & 2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(١) ٣- (ب) ٢ (ج) ٣ ± (د) ٤ ±

(٩) إذا كان: $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ فإن: $12 = \dots$

(١) ١٥ (ب) ٢ (ج) ١٢ (د) ٢٧

(١٠) إذا كان: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ فإن: $11 = \dots$

(١) ٢ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

(١١) إذا كان: $\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$ فإن: $\dots = \dots$

(١) ٢ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) $6 \pm$

(١٢) إذا كان: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$ فإن: $\dots = \dots$

(١) ٢، ٣ (ب) ٢، ٣، ٤ (ج) ٢، ٣ (د) ٢، ٣، ٤

(١٣) مجموعة حل المعادلة: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$ هي \dots

(١) $\{2\}$ (ب) $\{6\}$ (ج) $\{1, -1\}$ (د) $\{6, -6\}$

(١٤) إذا كان: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 48$ فإن: قيمة $3 = \dots$

(١) ٢ (ب) $2-$ (ج) $2 \pm$ (د) صفر

(١٥) مجموعة حل المعادلة: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{صفر في ك هي}$ \dots

(١) \emptyset (ب) $\{2, 2-\}$ (ج) $\{2, 2, 2-\}$ (د) $\{2, 2, 2-\}$

(١٦) مجموعة حل المعادلة: $\begin{vmatrix} 2 & 2+ \\ 3 & 3- \end{vmatrix} = 4$ هي \dots

(١) $\{2, 2-\}$ (ب) $\{2, 2-\}$ (ج) $\{2, 2-\}$ (د) $\{2, 2-\}$

(١٧) قيمة 0 التي تجعل المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ هي \dots

(١) ٥ (ب) $2-$ (ج) ١ (د) ٣

$$\dots\dots\dots = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 7 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad (18)$$

(1) صفر (ب) 1- (ج) 1 (د) 48×3

$$\dots\dots\dots \times \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 10 & 20 & 12 \end{vmatrix} \quad (19)$$

(1) 2 (ب) 4 (ج) 8 (د) 16

$$\dots\dots\dots \times (1-) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (3) \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\dots\dots\dots = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (21) \quad \text{فإن:} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

(1) 12- (ب) 12 (ج) صفر (د) 24

$$\dots\dots\dots = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (22) \quad \text{فإن:} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

(1) 30- (ب) 15- (ج) صفر (د) 15

$$\dots\dots\dots = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (23) \quad \text{فإن:} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

(1) 12- (ب) 6- (ج) 6 (د) 12

$$\dots\dots\dots = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (24)$$

(1) صفر (ب) 4 (ج) 3 (د) 4

$$\dots\dots\dots = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} \quad (25) \quad \text{فإن:} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

(1) 40- (ب) 20- (ج) 10- (د) 40

• (٢٦) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix} = ٢$ فإن: $\begin{vmatrix} ١٥ & ٢٥ & ٣٥ \\ ٤٥ & ٥٥ & ٦٥ \\ ٧٥ & ٨٥ & ٩٥ \end{vmatrix} = \dots$

(١) ٧٠٠ (ب) ١٠ (ج) ٢٥ (د) ٧٠

• (٢٧) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن: $\begin{vmatrix} ٢٢ & ٣٢ & ٤٢ \\ ٥٢ & ٦٢ & ٧٢ \\ ٨٢ & ٩٢ & ١٠٢ \end{vmatrix} = \dots$

(١) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٤٠ (د) ٨٠

• (٢٨) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix} = ٣٠$ فإن: $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ \end{vmatrix} = \dots$

(١) ٣٠ (ب) ١٠ (ج) ٢٠ (د) ٣٠

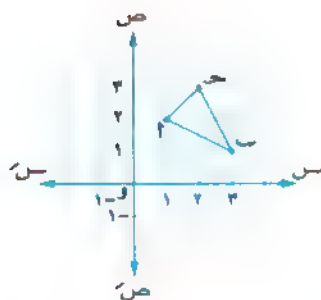
• (٢٩) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta$ فإن: $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} \neq \Delta$

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix}$

• (٣٠) إذا كانت: $A(٢, ٣)$ ، $B(٠, ٢)$ ، $C(-٢, ٣)$

فإن مساحة سطح المثلث ABC تساوي وحدة مربعة.

(١) ٢٨ (ب) ١٤ (ج) ٧ (د) ٢



• (٣١) مساحة $\Delta ABC = \dots$ وحدة مساحة.

(١) ٢-

(ب) ١,٥-

(ج) ١,٥

(د) ٣

• (٣٢) في الشكل المقابل :

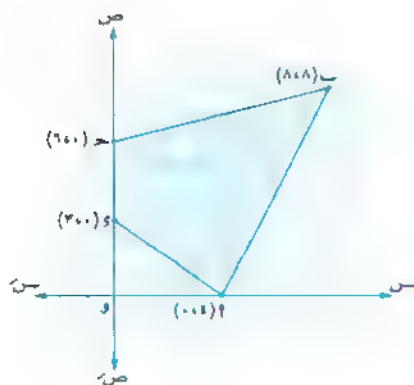
مساحة الشكل الرباعي $ABCD = \dots$ وحدة مربعة.

(١) ٢٠

(ب) ١٠

(ج) ٦٨

(د) ٢٤



(٣٣) إذا كان: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٦$ وكان $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = -٢٤$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢- (د) ٤-

(٣٤) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٥$ وكان $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٧$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ٥ (ب) ١٤ (ج) ٩- (د) ١٩

(٣٥) إذا كان: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ١$ فإن: $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ١ (ب) ١- (ج) ٢ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = ١$ وكان: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = I$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ١، ٤ (ب) ١-، ٤ (ج) ٤-، ١ (د) ٤-، ١-

(٣٧) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = ١$ وكان: $\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٧$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) صفر (ب) ٧ (ج) ١٠ (د) ١٤

(٣٨) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

(٣٩) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٧$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ٢ (ب) ٢- (ج) ٦ (د) ٨

(٤٠) إذا كان: $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ١$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ٢ (ب) ٢- (ج) ٦ (د) ٨

فإن: $\dots = \dots$

(أ) $١٠ \pm$ (ب) $٥٠ \pm$ (ج) $١٠٠ \pm$ (د) $٢٠ \pm$

(٤١) إذا كانت: $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = ١$ ، $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = ٢$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ٥$ فإن: $\dots = \dots$

(أ) ٣ (ب) ١٥ (ج) ٩ (د) ٢١

- (٤١) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث : $|A| = 2$ فإن : $|A^T| = \dots$
- (١) صفر (ب) $2-$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 2
- (٤٢) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 وكان : $|A| = 7$ فإن : $|A^2| = \dots$
- (١) 14 (ب) 28 (ج) 49 (د) 56
- (٤٣) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 وكان : $|A| = 15$ فإن : $|A^2| = \dots$
- (١) 15 (ب) 30 (ج) 60 (د) 120
- (٤٤) إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ وكان : $|A| = 12$ فإن : $|A^T| = \dots$
- (١) $24-$ (ب) 24 (ج) 48 (د) 3
- (٤٥) إذا كانت A مصفوفتين على النظم 3×3 بحيث كان : $|A| = 2$ ، $|B| = 1-$ فإن : $|A+B| = \dots$
- (١) $6-$ (ب) $18-$ (ج) 54 (د) $54-$
- (٤٦) إذا كانت A مصفوفة مربعة تحقق العلاقة : $I = A^T$ فإن : $|A| = \dots$
- (١) صفر فقط. (ب) 1 فقط. (ج) $1-$ فقط. (د) $1 \pm$
- (٤٧) إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وكان : $|A| = 125$ فإن : $|A^T| = \dots$
- (١) صفر (ب) $2 \pm$ (ج) $3 \pm$ (د) $5 \pm$
- (٤٨) إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$ فإن : $|A| = \dots$
- (١) 8 (ب) $8-$ (ج) 2 (د) $2-$
- (٤٩) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 وكان : $|A| = 5$ فإن : $|A^T| = \dots$
- (١) $5-$ (ب) صفر (ج) 5 (د) 25
- (٥٠) إذا كانت A مصفوفة على النظم 3×3 وكان : $|A| = 5$ فإن : $|A^T| = \dots$
- (١) $5-$ (ب) صفر (ج) 5 (د) 25
- (٥١) إذا كانت : $A = -I$ حيث : A مصفوفة على النظم 3×3 فإن : $|A| = \dots$
- (١) $1-$ (ب) صفر (ج) 1 (د) 2
- (٥٢) إذا كانت A مصفوفة شبه متماثلة على النظم $m \times m$ حيث m عدد زوجي فإن : $|A| = \dots$
- (١) صفر فقط. (ب) 1 فقط. (ج) $1-$ فقط. (د) أي عدد حقيقي.
- (٥٣) إذا كانت A مصفوفة مربعة على النظم 2×2 وكان : $|A| = 8$ فإن : $|A^2| = \dots$
- (١) 9 (ب) 12 (ج) 18 (د) 24

(٦٢) إذا كانت : $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ فإن مجموعة حل المعادلة $\left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ هي

- (أ) $\left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$ (ب) $\left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$ (ج) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$ (د) $\left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

(٦٣) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة : $x^2 - 4x - 10 = 0$ فإن : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ تساوى

- (أ) ١٧ (ب) ١٢ (ج) ٨ (د) ٦

(٦٤) إذا كانت : ٩، ب، ح، د أربعة أعداد صحيحة متتالية فإن : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

- (أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٢- (د) ١

• (٦٥) إذا كانت النقط (١، ٢-)، (٢، ٣)، (٣، ٥) منتصفات أضلاع ΔABC فإن مساحة ΔABC تساوى وحدة مساحة.

- (أ) ١,٥ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ١٢

• (٦٦) إذا كان : $P(1, 1)$ ، $B(2, 2)$ ، $C(3, 1)$ هي رؤوس المثلث ABC وكانت مساحة ΔABC تساوى ١,٥ وحدة مساحة فإن : $AB = \dots\dots\dots$

- (أ) ١ فقط (ب) ٢ فقط (ج) ١، ٢ (د) ٢، ٣

• (٦٧) إذا كانت النقط (٢، ٣)، (٥، ٩)، (٩، ٤) ثلاثة رؤوس لمتوازي الأضلاع فإن مساحة متوازي الأضلاع = وحدة مربعة.

- (أ) ١٩ (ب) ٢٨ (ج) ٧٦ (د) ٣٠٤

(٦٨) إذا كانت مساحة $\Delta ABC = 5$ وحدة مساحة حيث $P(1, -1)$ ، $B(2, 0)$ ، $C(3, 1)$ وكانت ح تقع على المستقيم $3x + 2y - 4 = 0$ فإن : $AB = \dots\dots\dots$

- (أ) $\{2, -3\}$ (ب) $\{2, 3\}$ (ج) $\{2, -2\}$ (د) $\{2, 2\}$

(٦٩) إذا كان : $P(1, 2)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(0, 0)$ فإن مساحة الشكل الرباعي $PBCD = \dots\dots\dots$ وحدة مساحة.

- (أ) ٧ (ب) ٥ (ج) ٣,٥ (د) ٢,٥

(٧٠) مساحة المثلث المحصور بين المستقيمتين $l_1: 2x + 3y = 5$ ، $l_2: 2x + 3y = -5$ ومحور السينات يساوى وحدة مساحة.

- (أ) ٣٠ (ب) $\frac{121}{4}$ (ج) $\frac{125}{4}$ (د) $\frac{127}{4}$

(٧١) لكي يكون لنظام المعادلات $x_1 = x_2 + x_3$ ، $x_2 = x_3 + x_4$ ، $x_3 = x_4$ حل وحيد يجب أن يكون

$$\begin{aligned} (أ) \quad 0 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (ب) \quad 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (ج) \quad 0 &\neq \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (د) \quad 0 &\neq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(٧٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{x_1 - x_2 - x_3}$

فإن مجموعة حل نظم المعادلات : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ هي

- (أ) $\{(1, -1)\}$ (ب) $\{(1)\}$ (ج) $\{(1, -1)\}$ (د) $\{(1, 1)\}$

الأسئلة المثالية

ثانياً

١ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

$$\begin{aligned} (١) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (٢) \quad \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \\ \frac{8}{9} & 1 \end{vmatrix} \\ (٣) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (٤) \quad \begin{vmatrix} 1 + x^2 & 1 + x \\ 1 + x^2 & 1 + x \end{vmatrix} \\ (٥) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \theta & \theta \end{vmatrix} \quad (٦) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \theta & \theta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

٢ أثبت أن :

$$(١) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (٢) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \theta & \theta \\ \theta & \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

٣ إذا كان : $\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = 3$ فاحسب قيمة كل من :

$$(١) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (٢) \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

٤ أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

$$\begin{aligned} (١) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad (٢) \quad \begin{vmatrix} 23 & 3 & 13 \\ 5 & 7 & 20 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (٣) \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} \quad (٤) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{حيث } t^2 = 1) \end{aligned}$$

5 بدون فك المحدد أوجد قيمة :

$$\begin{vmatrix} 10 & 1- & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 10- & 2 & 0- \end{vmatrix} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1- & 3- & 2 \\ 2 & 6 & 4- \end{vmatrix} \quad (2) \quad \text{« صفر ، صفر »}$$

6 حل كلاً من المعادلات الآتية :

$$\begin{vmatrix} 3 & 4- & 2 \\ 1- & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1) \quad \text{« 3 ، 1 »}$$

$$\begin{vmatrix} 1- & 2 & 1 \\ 1 & 1+ & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad (2) \quad \text{« 1- ، صفر ، 2 »}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1- & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \quad (3) \quad \text{« 2- ، 8 »}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2+ & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad (4) \quad \text{« 2 ، 1 ، 0 ، 2 »}$$

$$\begin{vmatrix} 70 & 20 \\ 70 & 20 \end{vmatrix} = 2- \quad (5) \quad \text{« 2 »}$$

7 أوجد قيمة س التي تجعل : $\begin{vmatrix} 3 & 2- & 1- \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & س & 1- \end{vmatrix} = \frac{11-}{3}$ يساوي ثلاثة أمثال $\begin{vmatrix} 1 & 3- \\ 2 & 2- \end{vmatrix}$

8 أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث :

$$(1) \quad 4(2, 4), 2(4, 2), 3(2, 0) \quad \text{« وحدة مربعة »}$$

$$(2) \quad 3(3, 3), 4(2, 4), 5(4, 1) \quad \text{« وحدة مربعة »}$$

9 باستخدام المحددات أثبت أن كلاً من النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

$$(1) \quad (0, 3), (4, 1), (5, 0) \quad (2) \quad (2, 3), (1, 0), (0, 5) \quad (3) \quad (2, 3), (1, 0), (0, 5)$$

10 حل كل نظام من المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر :

$$(1) \quad \begin{cases} 3س + 2ص = 5 \\ 2س + 5ص = 8 \end{cases} \quad \text{« 2 ، 1 »}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2س + 3ص = 0 \\ 2س - 3ص = 1 \end{cases} \quad \text{« } \frac{1-}{7} , \frac{2}{7} \text{ »}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 2س - 1 = 4ص \\ 5س + 12 = 7ص \end{cases} \quad \text{« 1 ، 1 »}$$

١١ حل كل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر :

(١) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 10 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 10 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

« ١ ، ٢ ، ٣ »

$4 = 2x + 3y + z$ ،

(٢) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

« ٢ ، ٢ ، صفر »

$14 = 2x + 3y + z$ ،

(٣) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

« $\frac{11}{12}$ ، $\frac{70}{13}$ ، $\frac{5}{3}$ »

$11 = 2x + 3y + z$ ،

« ١ ، ١ ، ١ »

(٤) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$

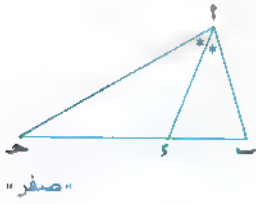
« ٥ ، ٣ ، ٢ »

(٥) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$

(٦) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

« ١ ، ١ ، ١ »

(٧) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$



« صفر »

١٢ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث ، أ ب ينصف د ب ح

أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

مسائل لتقييم مهارات التفكير

١ اختر الإجابة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، حيث $\theta \in [0, \pi]$ ، $\frac{\pi}{2}$

وكان $| \sin \theta | = \frac{1}{2}$ فإن : $\theta = \dots$

(١) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٢) مجموعة حل المعادلة : $\left| \frac{2}{3} |x-1| - \frac{1}{4} \right| = 7$ هي

(١) $\{4, 6\}$ (ب) $\{6, 4\}$ (ج) $\{4, -6\}$ (د) \emptyset

(٣) حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1$ حيث $0^\circ \leq x < 360^\circ$ هو

(١) 135° ، 45° (ب) 135° ، 225° (ج) 45° ، 225° (د) 45° ، 315°

تذكر • مهم • تطبيقي • مستويات عليا

• (٤) النقاط ١ (٥، ١)، ب (٢، ٢)، ج (١، ٢)

(أ) رؤوس مثلث قائم الزاوية مساحته ٥ وحدات مربعة.

(ب) رؤوس مثلث متساوي الساقين مساحته ١٠ وحدات مربعة.

(ج) رؤوس مثلث متساوي الأضلاع مساحته ٩ وحدات مربعة.

(د) تقع على استقامة واحدة.

• (٥) إذا كان: $\left| \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right| = 10 = \left| \frac{1}{e} + e \right|$ فإن: $\frac{1}{e} + e = \dots$

(١) ١٦ (ب) ١٥ (ج) ١٤ (د) ١٣

• (٦) عدد قيم s الصحيحة التي تجعل قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5 & 14 & s \\ 2 & 7 & 8+s \end{vmatrix} \geq 1$ يساوي ..

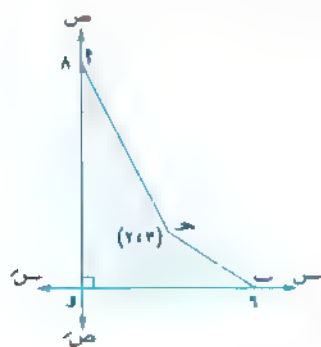
(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

• (٧) إذا كان: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ فإن: $9 + s = \dots$

(أ) ٨ (ب) ٢- (ج) ٨- (د) ٢

• (٨) إذا ضربت جميع عناصر محدد من الدرجة الثالثة قيمته m في العدد ٢ فإن قيمة المحدد الناتج تساوي

(أ) m (ب) $2m$ (ج) $4m$ (د) $8m$



١٨٠ وحدة مربعة

٢ في الشكل المقابل :

أوجد مساحة الشكل المظلل

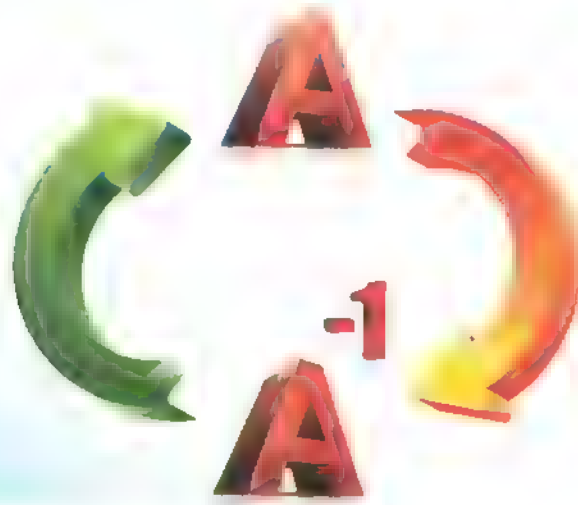
مستخدمًا المحددات.

٣ باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

"١٤١٤١٤"

المعكوس الضربي للمصفوفة



إذا كانت : A ، مصفوفتين مربعيتين على النظم 2×2
وكان : $I = AB = BA$ حيث I مصفوفة الوحدة على النظم 2×2
فإن : المصفوفتين A ، B كلا منهما معكوس ضربي للآخر.

فمثلاً إذا كانت : $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ،

فإن : $I = AB = BA$ ، $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

أي أن $I = AB = BA$

∴ المصفوفتان A ، B كل منهما معكوس ضربي للآخر.

ملاحظة

إذا كان المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ،

فإن المصفوفة A ليست معكوس ضربي للمصفوفة B

على الرغم من أن $I = AB = BA$ ، $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

وذلك لأن المصفوفة A ، المصفوفة B ليست مربعة.

المعكوس الضربي للمصفوفة ٢ × ٢

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة

الذي يرمز له بالرمز I^{-1} يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد $I = \Delta \neq 0$ ويكون :

$$I^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ٤- & ٢- \\ ٣- & ١- \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad I = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

مثال ١

أوجد المعكوس الضربي إذا كان له وجود لكل من المصفوفتين الآتيتين :

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١٢ & ٢ \end{pmatrix} = I \quad \begin{pmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix} = I^{-1}$$

الحل

$$1. \quad \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤- & ٢ \end{vmatrix} = (٢)(٢) - (٤-)(٢-) = ٢ \neq 0 \quad \therefore \text{المصفوفة } I \text{ معكوس ضربي.}$$

$$\therefore I^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ٢- & ٢- \\ ٣- & ١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ٤- \\ ١- & ٢- \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١٢ & ٢ \end{vmatrix} = (٢)(٢) - (١٢)(١) = ٠ \quad \therefore I^{-1} \text{ غير معرف (ليس له وجود)}$$

حاول بنفسك

أوجد إن أمكن المعكوس الضربي للمصفوفة : $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢- & ٢ \end{pmatrix}$

مثال ٢

أوجد قيم s الحقيقية التي تجعل للمصفوفة I في كل مما يأتي معكوسًا ضربيًا :

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١-s \\ ٢-s & ٣ \end{pmatrix} = I \quad \begin{pmatrix} ٢ & s \\ s & ١٢ \end{pmatrix} = I^{-1}$$

الحل

١. المصفوفة I لا يكون لها معكوس ضربي إذا كان : $0 = |I|$

$$\text{أي عندما } \begin{vmatrix} ٢ & s \\ s & ١٢ \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore s^2 - ٢٦ = 0 \quad \therefore s = \pm \sqrt{٢٦}$$

\therefore المصفوفة I لا يكون لها معكوس ضربي عند $s = \pm \sqrt{٢٦}$

\therefore يكون للمصفوفة I معكوس ضربي عندما $s \in \mathbb{R} - \{\sqrt{٢٦}, -\sqrt{٢٦}\}$

المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربى إذا كان $|A| = 0$.

$$\text{أى عندما } 0 = \begin{vmatrix} 1-s & 4 \\ s-2 & 2 \end{vmatrix} \therefore (1-s)(2-s) = 12 \therefore$$

$$s^2 - 3s + 2 = 12 \therefore s^2 - 3s - 10 = 0 \therefore$$

$$(s-5)(s+2) = 0 \therefore s = 5 \text{ أو } s = -2$$

\therefore المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربى عندما $s = 5$ أو $s = -2$

\therefore المصفوفة لا يكون لها معكوس ضربى عندما $s \in \{5, -2\}$

حاول بنفسك

أوجد قيم s الحقيقية التى تجعل للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1-s & 4 \\ s+1 & 2 \end{pmatrix}$ معكوساً ضربياً.

مثال ٣

إذا كانت: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن:

$$A^{-1}B^{-1} = (B^{-1}A^{-1})^{-1} \quad (٢) \quad A^{-1}B^{-1} = (B^{-1}A^{-1})^{-1}$$

الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \therefore A^{-1} \text{ لا يوجد} \quad (١)$$

$$\therefore A^{-1} \text{ له وجود (معرف) ، } \therefore \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ حيث } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{4}{\Delta} & \frac{2}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} = A^{-1}$$

$$\therefore |A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{2}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{4}{\Delta} & \frac{2}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \cdot 0 = 0 \therefore A^{-1} \text{ له وجود.}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{4}{\Delta} & \frac{2}{\Delta} \end{pmatrix} \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} = A^{-1} \therefore$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1} \therefore$$

$$\therefore |B^{-1}A^{-1}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \neq 2 = (2)(2) - (1)(1) \therefore B^{-1}A^{-1} \text{ له وجود.}$$

$$(١) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} = B^{-1}A^{-1} \therefore$$

$$\therefore |B^{-1}A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \neq 1 = (3)(1) - (1)(2) \therefore B^{-1}A^{-1} \text{ له وجود.}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = {}^{-1}A \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{1} = {}^{-1}B$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = {}^{-1}A {}^{-1}B$$

من (1) ، (2) ينتج أن : ${}^{-1}A {}^{-1}B = {}^{-1}(AB)$

حاول بنفسك

باستخدام المصفوفتين A ، B في المثال السابق أثبت أن : ${}^{-1}B {}^{-1}A = {}^{-1}(BA)$

ملاحظة

إذا كانت A مصفوفة مربعة على النظم 2×2 بحيث $|A| \neq 0$ ، ج مصفوفة أخرى وكان :

1 $AS = S$ فإن : $S = {}^{-1}A$ ج

وذلك : بضرب طرفي المعادلة $\times A$

$AS = S \Rightarrow A(SI) = S(IA) \Rightarrow A(S) = S(A) \Rightarrow AS = SA$

2 $SA = A$ فإن : $S = {}^{-1}A$ ج

لاحظ أن

$SI = I \Rightarrow S = I$ *
 $IA = A \Rightarrow I = A$ *

مثال 4

أوجد المصفوفة S التي تحقق أن : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = S \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

الحل :

بفرض أن : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = A$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = S \times A$

\therefore المعادلة هي : $AS = A$ $\therefore S = I$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(3) = 1 - 6 = -5 \neq 0$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-5} = {}^{-1}A$

حاول بنفسك

أوجد المصفوفة S التي تحقق أن : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times S$

حل معادلتين اثنتين باستخدام المعكوس المصفوفي

لحل المعادلتين الخطيتين على الصورة : $\begin{cases} ١س + ٢ص = ١٠ \\ ٢س + ٣ص = ٢٠ \end{cases}$ ، أنيًّا باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة نتبع الآتي :

١ نكتب المعادلتين على صورة المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٢٠ \end{pmatrix} \quad \text{أي على الصورة } \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

حيث $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات

، $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المجهول ، $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت.

٢ نوجد حل المعادلة المصفوفية : $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ فيكون $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$

ومن ذلك يمكن استنتاج قيم المجهولين $س$ ، $ص$

مثال ٥

حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

$$\boxed{١} \quad \begin{cases} ٢س + ٣ص = ٧ \\ س - ص = ١ \end{cases} \quad \boxed{٢} \quad \begin{cases} س - ٢ص = ١ \\ ٣ص = ٢ - س \end{cases}$$

الحل

١ المعادلة المصفوفية هي : $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ حيث :

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = (٢)(-١) - (٣)(١) = -٥ \neq ٠$$

∴ للمصفوفة \mathbf{A} معكوس ضربي هو $\mathbf{A}^{-1} = \frac{١}{-٥} \begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ -\frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} \end{pmatrix}$

$$\therefore \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ -\frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٧ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \quad \therefore س = ٢ ، ص = ١ \quad \text{وتكون مجموعة الحل} = \{(١ ، ٢)\}$$

$$\boxed{٢} \quad \begin{cases} س - ٢ص = ١ \\ ٣ص = ٢ - س \end{cases} \quad \therefore س = ١ ، ص = ٠$$

المعادلة المصفوفية هي : $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ حيث : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3- \\ 1 & 2- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3- \\ 1 & 2- \end{pmatrix} \frac{1}{1} = 1^{-1} \therefore 0 \neq 1 = (2)(2-) - (3-)(1) = \begin{vmatrix} 2- & 1 \\ 3- & 2 \end{vmatrix} = 11 = \Delta \therefore$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1- \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3- \\ 1 & 2- \end{pmatrix} = \text{س} \therefore \text{س} = 1^{-1} \text{ج}$$

$$\therefore \text{س} = 3, \text{ص} = 2 \text{ وتكون مجموعة الحل } = \{(2, 3)\} \quad \therefore \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

حاول بنفسك

حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة : $\text{س} + 2\text{ص} = 4, \text{ص} + 2\text{س} = 7$

مثال 6

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $4\text{س}^2 + \text{س}$ يمر بالنقطتين (2, 0) ، (1-, 3-) استخدم المصفوفات لإيجاد قيمتي الثابتين : $\text{س}, \text{ص}$

الحل

\therefore منحنى الدالة د يمر بالنقطة (2, 0) \therefore د (2) = 0

$$\therefore 0 = 4 \times (2)^2 + \text{س} \therefore \text{س} = -16 \quad (1)$$

\therefore منحنى الدالة د يمر بالنقطة (1-, 3-) \therefore د (1-) = 3-

$$\therefore 3- = 4 \times (1-)^2 + \text{س} \therefore 3- = \text{س} + 4 \quad (2)$$

ولحل المعادلتين (1) ، (2) نكتب المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \quad \text{حيث : } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1^{-1} \text{ج}$$

فيكون $\text{س} = 1^{-1} \text{ج}$

$$\therefore \Delta = 11 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 \times 1 = 3 \therefore$$

$$\therefore 1^{-1} = \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} 1- & 1 \\ 4 & 1- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1-}{3} \end{pmatrix} = \text{س} \therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 4- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1-}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 4- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3- \end{pmatrix} \therefore 1 = 0, 4- = 3-$$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة وسوف نقوم بعرض ذلك في نهاية الوحدة.



اختبر نفسك

مستويات عليا

على المعكوس الضربي للمصفوفة

تمارين

5

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) أى المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربي ؟
 - (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
 - (ب) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
 - (ج) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$
 - (د) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (٢) أى من المصفوفات الآتية لها معكوس ضربي ؟
 - (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 - (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
 - (ج) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - (د) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- (٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي فإن : س =
 - (أ) ٢-
 - (ب) صفر
 - (ج) ٢
 - (د) ٣
- (٤) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي هى
 - (أ) ٨-
 - (ب) ١٠-
 - (ج) ٨
 - (د) ١٠
- (٥) إذا كانت المصفوفة ب هى المعكوس الضربي للمصفوفة أ فإن
 - (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - (ب) $I = A + B$
 - (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + B$
 - (د) $\frac{1}{2} = A + B$
- (٦) المصفوفة $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربي عندما
 - (أ) $6 = 4$
 - (ب) $6 \neq 4$
 - (ج) $4 \in \{6\} - \mathcal{C}$
 - (د) $4 \in \{6, 6\} - \mathcal{C}$
- (٧) المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي عندما س =
 - (أ) فقط ٣
 - (ب) $3 \pm$
 - (ج) ٥ فقط
 - (د) $5 \pm$
- (٨) المعكوس الضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ يساوى
 - (أ) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
 - (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
 - (ج) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 - (د) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(٩) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = I$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) $\begin{pmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 0- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 2- \\ 3- & 0 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 0 & 2- \\ 3- & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 0- \end{pmatrix}$

(١٠) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 0 \end{pmatrix} = S$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) S (ب) S^{-1} (ج) I (د) \square

(١١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = I$ وكانت $\begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 3 & S \end{pmatrix} = I$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) 2 (ب) 3- (ج) 0 (د) 0-

(١٢) إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين $I = M \times N$ وكانت المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ فإن المصفوفة $M = \dots$

(أ) $\begin{pmatrix} 0 & 2- \\ 8- & 3 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 3- & 8 \\ 2 & 0- \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 0 & 2- \\ 8- & 3 \end{pmatrix}$

(١٣) إذا كان : $I = \begin{pmatrix} 1- & 1 \\ S & 3- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٤) إذا كانت : $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1- \end{pmatrix} \times I$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$ (ج) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$ (د) $\begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(١٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I^{-1}$ ، $\begin{pmatrix} 2- & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & 4- \\ 1 & 4- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4- & 4 \\ 1 & 4- \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 4 & 4- \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 4 & 4- \\ 1 & 4- \end{pmatrix}$

(١٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 4 & 1- \\ 3 & 2- \end{pmatrix} = I$ وكان $I^{-1} \times M = M$ فإن : $\dots = \dots$

(أ) $\begin{pmatrix} 4 & 7- \\ 1 & 4- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 8 & 7- \\ 1 & 4- \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 8- & 7 \\ 1- & 4 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 8- & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(١٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 2 & S \\ 3- & S \end{pmatrix} = I$ وكان : $I^{-1} \times I = I$ فإن : $S \times S = \dots$

(أ) 2 (ب) 2 (ج) 2- (د) 3-

(١٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = S$ فإن : $\begin{pmatrix} S & S \\ S & S \end{pmatrix} = S$

(أ) $\begin{pmatrix} S & S \\ S & 0 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} S & S \\ S & 0 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} S & S \\ S & 0 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} S & S \\ S & 0 \end{pmatrix}$

(٢١) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = I$ وكان : $1 = -1$ فإن : $1 = \dots$ حيث $1 \in \mathbb{R}$

(١) ١ (ب) -١ (ج) صفر (د) ٢

(٢٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $1 = 1 + 1 = \dots$

(١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(٢٣) عند حل المعادلتين : $1 = 1 + 1 = 1$ ، $1 = 1 + 1 = 1$ وجد أن المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

معكوسها الضربي هو $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $1 = 1 + 1 = \dots$

(١) ٢ (ب) صفر (ج) ٩ (د) -٢

(٢٤) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ ، $1 = 1 + 1 = 1$ فإن المصفوفة $1 = \dots$

(١) ٤ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ١٠

(٢٥) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ وكان : $1 = 1 + 1 = 1$ فإن المصفوفة $1 = \dots$

(١) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ وكان : $1 = 1 + 1 = 1$ فإن : $1 = 1 - 1 = \dots$

(١) ١٧ (ب) ١٧- (ج) ٧ (د) ٧-

(٢٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ فإن : $1 = 1 + 1 = 1$

(١) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٨) إذا كانت : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I$ وكانت : $1 = 1 \times 1 = 1$ فإن : $1 = \dots$

(١) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢٩) إذا كانت : $1 = 1 + 1 = 1$ فإن : $1 = 1 + 1 = 1$

(١) ١ (ب) ١ (ج) ١ (د) ١

(٣٠) إذا كانت : $1 = 1 + 1 = 1$ فإن : $1 = 1 + 1 = 1$

(١) ١ (ب) ١ (ج) ١ (د) ١

تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

• (٢٩) إذا كان: $A = B = C$ فإن: $S = \dots$
 (أ) $A = B = C$ (ب) $A = B = C$ (ج) $A = B = C$ (د) $A = B = C$

• (٣٠) إذا كانت A مصفوفة مربعية بحيث $A \neq 0$ ، $A \neq I$ وكان: $A = -A$

فإن: $A = (A + I) \dots$

(أ) $A = I$ (ب) $A = I$ (ج) $A = I + A$ (د) $A = I + A$

• (٣١) إذا كانت A مصفوفة شبه متماثلة على النظم 2×2 وكان: $A = I$ فإن: \dots

(أ) $A = I$ (ب) $A = I$ (ج) $A = I$ (د) $A = I$

• (٣٢) إذا كانت: $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ فإن:

أولاً: A لها معكوس ضربي عندما $\theta \in \dots$

(أ) $\left[\frac{\pi}{4}, 0 \right]$ فقط. (ب) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ فقط. (ج) $\left[\frac{\pi}{4}, 0 \right]$ فقط. (د) \dots

ثانياً: $A = \dots$

(أ) $A = I$ (ب) $A = I$ (ج) $A = I$ (د) $A = I$

• (٣٣) إذا كانت A مصفوفة على النظم 2×2 وكان: $A = I$ ، $A = I$

فإن: $A + I$ يمكن أن تساوى \dots

(أ) 0 (ب) 6 (ج) $\frac{13}{4}$ (د) $\frac{15}{4}$

• (٣٤) إذا كانت: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة A حيث $n \in \mathbb{Z}$ هو \dots

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

• (٣٥) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $A \neq 0$ وكان: $A = I$ فإن: $A = \dots$

(أ) $A = I$ (ب) $A = I$ (ج) $A = I$ (د) $A = I$

• (٣٦) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث $A \neq 0$ وكان: $A = I$ فإن: $A = \dots$

(أ) $A = I$ (ب) $A = I$ (ج) $A = I$ (د) $A = I$

الأسئلة المقالية

ثالثاً

١ بين المصفوفات التي لها معكوسات ضربية والمصفوفات التي ليس لها معكوسات ضربية فيما يلي وأوجد المعكوس إن وجد:

(١) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

٢ ما قيم ؟ الحقيقية التي تجعل لكل من المصفوفات الآتية معكوسًا ضربيًا :

$$\begin{array}{ccc} (1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1-1 & 2 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 \\ 2-1 & 1 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 2-1 & 8 \\ 2 & 2+1 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 1 \end{pmatrix} \text{ حيث } 1- = 1- \end{array}$$

٣ أوجد قيم س الحقيقية التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} 27 & س \\ س & 3 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي.

٤ إذا كانت : $1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، $م = \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 3 & 5- \end{pmatrix}$ فأثبت أن : المصفوفة م معكوس ضربي للمصفوفة 1

٥ إذا كانت . $س = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $س^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

٦ إذا كانت : $م = \begin{pmatrix} س & س-س \\ س & س \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $م^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ س & س \end{pmatrix}$ علماً بأن : $س \neq 0$.

٧ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} 1- & 1 \\ 3 & 1- \end{pmatrix}$ فأثبت أن :

$$(1) (س-ص)^{-1} = ص^{-1} س^{-1} \quad (2) (س-1)^{-1} = س^{-1} \quad (3) (س-ص)^{-1} = ص^{-1} س^{-1}$$

٨ إذا كانت : $1 = \begin{pmatrix} 1- & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

٩ إذا كانت : $1 = \begin{pmatrix} 2 & س \\ 4 & س \end{pmatrix}$ وكان : $س = ٧$ أثبت أن : $1^{-1} = 1 + 1 = ٦$

١٠ إذا كانت : $م = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $1 = م$ فأوجد : المصفوفة 1

١١ أوجد المصفوفة 1 في كل مما يأتي :

$$(1) 1 = \begin{pmatrix} 2- & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

١٢ إذا كانت . $1 = \begin{pmatrix} 2- & 2 \\ 3 & 1- \end{pmatrix}$ ، $1 = م$ فأوجد : المصفوفة م

١٣ إذا كان : $1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ وكانت : $1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فأوجد : م⁻¹

١٤ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

(١) $\begin{cases} 2s + 2v = 5 \\ 2s + v = 2 \end{cases}$ ، $2s + v = 2$ ، $2s + v = 2$

(٢) $\begin{cases} 2s + 7v = 2 \\ 2s + v = 2 \end{cases}$ ، $2s + v = 2$ ، $2s + v = 2$

(٣) $\begin{cases} 2s + 2v = 1 \\ 2s + v = 1 \end{cases}$ ، $2s + v = 1$ ، $2s + v = 1$

(٤) $\begin{cases} \frac{1}{3}s - v = 1 \\ \frac{1}{3}s + v = 5 \end{cases}$ ، $\frac{1}{3}s + v = 5$ ، $\frac{1}{3}s + v = 5$

١٥ اختبار تقييم مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت A مصفوفة شبه متماثلة على النظم 2×2 فإن A^{-1} تكون

(١) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (ج) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٢) إذا كان A مصفوفة شبه متماثلة على النظم 2×2 فإن A^{-1} تكون

(١) متماثلة. (ب) شبه متماثلة. (ج) مصفوفة قطرية. (د) غير موجودة.

(٣) إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 3 & v \end{pmatrix}$ وكان $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $s + v =$

(١) ٣- (ب) ٥- (ج) ٧- (د) ٩-

(٤) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$ حيث θ زاوية حادة فإن :

أولاً : $A^{-1} =$

(١) $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$

ثانياً : إذا كان $A^{-1} = I$ فإن $\theta =$

(١) صفر (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

(٥) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث كان $A^{-1} = I + A$ فإن $A^{-1} =$

فإن المعكوس الضربي للمصفوفة $(I + A)$ يساوي

(١) $I + A$ (ب) $I + A$ (ج) $I + A$ (د) $I + A$

(٦) إذا كان $A^{-1} = I + A$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة A هو

(١) $I - A$ (ب) $I - A$ (ج) $I - A$ (د) $I + A$

نشاط تكنولوجيا على الوحدة الأولى

استخدام الآلة الحاسبة العلمية في المصفوفة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية التي تدعم المصفوفات في العديد من العمليات التي تتعلق بالمصفوفات مثل :

* إيجاد مدور المصفوفة. * إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات.

* إيجاد قيمة محدد المصفوفة. * إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة.

وما نعرضه هنا سيكون باستخدام الآلة من النوع (CASIO fx-991ES PLUS)

أولاً : إدخال المصفوفة أ $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$



• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالي من اليسار إلى اليمين :

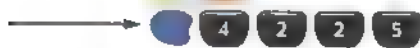
وذلك لاختيار مصفوفة من النظم 2×2

إدخال عناصر الصف الأول $\rightarrow (-) 7 = 0 =$

ثم أدخل عناصر المصفوفة أ بالضغط على الأزرار بالتتابع التالي :

إدخال عناصر الصف الثاني $\rightarrow 4 = 7 =$

ثانياً : إدخال المصفوفة ب $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$



• اضغط على أزرار الآلة بالتتابع التالي من اليسار لليمين :

لاختيار مصفوفة أخرى من النظم 2×2

إدخال عناصر الصف الأول $\rightarrow (-) 8 = 4 =$

ثم أدخل عناصر المصفوفة ب بالضغط على الأزرار بالتتابع التالي :

إدخال عناصر الصف الثاني $\rightarrow 0 = 7 =$

وهكذا نكون أدخلنا المصفوفتين أ ، ب ويمكن إجراء بعض العمليات عليهما كالآتي :



لاختيار أمر Trn (مدور)

لاختيار MAT A (مصفوفة أ)

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ التي تمثل أ

١ لإيجاد \rightarrow اضغط الأزرار

بالتتابع من اليسار لليمين :



MAT A

+

MAT B

ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$ والتي تمثل أ + ب

٢ لإيجاد \rightarrow اضغط الأزرار

بالتتابع من اليسار لليمين :

٣ لإيجاد \mathbf{A}^{-1} اضغط الأزرار بالتتابع

من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} 28 & 56 \\ 60 & 32 \end{pmatrix}$ والتي تمثل \mathbf{A}^{-1}

٤ لإيجاد قيمة محدد المصفوفة \mathbf{A} اضغط الأزرار

بالتتابع من اليسار لليمين :



سيظهر لك على الشاشة -٤٩ والذي يمثل قيمة محدد المصفوفة \mathbf{A}

٥ لإيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة \mathbf{A} اضغط

الأزرار بالتتابع من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ والتي تمثل المعكوس الضربي للمصفوفة \mathbf{A}

٦ لإيجاد $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}$ اضغط الأزرار

بالتتابع من اليسار لليمين :



ستظهر لك على الشاشة المصفوفة $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$ والتي تمثل $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}$

حاول بنفسك

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل مما يأتي :

\mathbf{B}^{-1} ، $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ، \mathbf{A} ، محدد \mathbf{B} ، \mathbf{B}^{-1} ، $\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}$ ، $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ ، $\mathbf{B} \mathbf{A}^T$



2

الوحدة

البرمجة الخطية

دروس الوحدة

المقدمة: تعريف البرمجة الخطية، وأهميتها في الحياة اليومية.

1

المقدمة: تعريف البرمجة الخطية، وأهميتها في الحياة اليومية.

2



نواتج التعلم

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل متباينات من الدرجة الأولى في مجهول واحد مع تمثيل الحل بيانيًا.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى في مجهولين وتحديد منطقة الحل بيانيًا.
- يحل نظامًا من المتباينات الخطية بيانيًا.
- يحل مسائل حياتية على أنظمة المتباينات الخطية.
- يستخدم البرمجة الخطية في حل مشكلات رياضية حياتية.
- يضع معلومات خاصة بموضوع مشكلة رياضية حياتية في جدول مناسب ، ويترجم البيانات لها في صورة متباينات خطية ، ثم يحدد منطقة الحل بيانيًا.
- يعين دالة الهدف بدلالة الإحداثيات ، مع تحديد النقط التي تنتمي إلى مجموعة الحل وإعطاء الحل الأمثل لدالة الهدف.

المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيا

1



تذكر خواص علاقة التباين في \mathcal{E} :

بفرض أن a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية :

- إذا كان : $a \geq b$ فإن : $a + c \geq b + c$ سواء كانت c موجبة أو سالبة
- إذا كان : $a \geq b$ فإن : $a - c \geq b - c$ إذا كانت c موجبة
- إذا كان : $a \geq b$ فإن : $a - c \leq b - c$ إذا كانت c سالبة

• يمكنك استنتاج الخواص السابقة في حالة علامات التباين الأخرى « $<$ »، « $>$ »

حل متباينة الدرجة الأولى في متغير واحد بيانيا

* كل من المتباينات $2x - 4 \leq x + 2$ ، $3x > 5$ ، $2x \leq 3$ تسمى متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد.

* حل المتباينة معناه إيجاد جميع عناصر مجموعة التعويض التي تحقق المتباينة.

* وقد تكون مجموعة التعويض هي \mathcal{E} أو $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$

، وفيما يلي نوضح كيفية حل المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد في كلتا الحالتين.

مثال توضيحي

وضح بيانياً مجموعة حل المتباينة : $3x + 10 < 1$

- ١ إذا كانت مجموعة التعويض هي \mathcal{E} ٢ إذا كانت مجموعة التعويض هي $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$

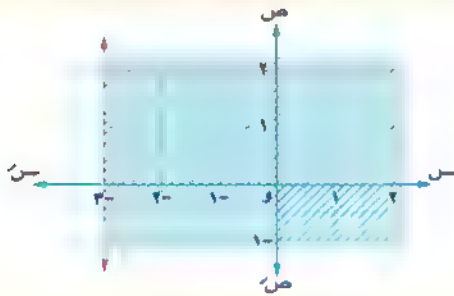
الحل

$$3s + 1 < 10$$

$$\therefore 3s < 9$$

$$\therefore s < 3$$

٢ إذا كانت مجموعة التعويض هي $s \times s$ تمثل مجموعة الحل على الشبكة التربيعية



- مجموعة الحل هي جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها السيني أكبر من 3-
- مجموعة الحل هي المنطقة التي تقع على يمين الخط المستقيم : $s = 3$ (وتسمى نصف المستوى).
- رسم المستقيم $s = 3$ بشكل منقطع يشير أن مجموعة نقاط هذا المستقيم ليست متضمنة في مجموعة الحل.

١ إذا كانت مجموعة التعويض هي s تمثل مجموعة الحل على خط الأعداد



- مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من 3-
- مجموعة الحل تمثل الجزء من خط الأعداد الذي يقع يمين العدد 3-
- وجود حلقة مفرغة عند 3- يعني أنها ليست متضمنة في مجموعة الحل.

مثال ١

وضح بيانيًا مجموعة الحل للمتباينة : $5 - s - 7 \geq 2 - s - 1$ في $s \times s$

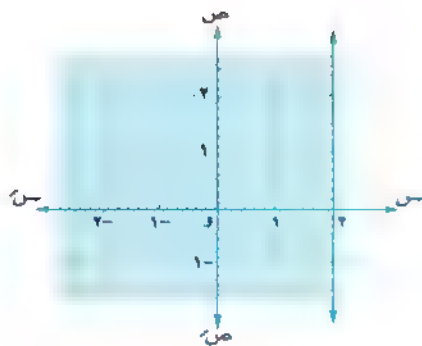
الحل

$$\therefore 5 - s - 7 \geq 2 - s - 1$$

$$\therefore 5 - s - 2 - 1 \geq 7 - s - 1$$

$$\therefore 3 - s \geq 6$$

$$\therefore s \geq 2$$



لاحظ أن

١ المنطقة المظللة على يسار المستقيم $x = 2$ لأن علاقة التباين أصغر من.

٢ المستقيم $x = 2$ رسم متصلًا لاحتواء علاقة التباين على علامة التساوي أي \geq

مثال ٢

وضح بيانيًا مجموعة حل المتباينة : $x - 1 \geq 4 + x + 5 > 17$ حيث $x \in \mathbb{R}$

الحل

$$\therefore x - 1 \geq 4 + x + 5 > 17 \quad \therefore 1 - x \geq 2 - x + 17 > 17$$

$$\therefore 12 > 2 - x \geq 17 \quad \therefore 4 > x \geq 2$$



$$\therefore \text{ح.م} =]2, 4]$$

مثال ٣

أوجد بيانيًا مجموعة حل المتباينة :

$$2 - x \geq 2 - x + 1 > 5 \text{ حيث } x \in \mathbb{R}$$

الحل

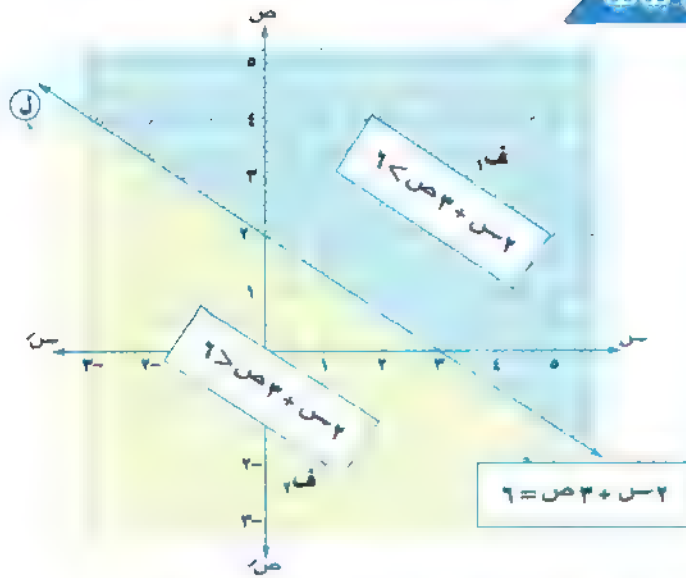
بتجزئة المتباينة إلى متباينتين كالتالي :

| | |
|--|--|
| $\begin{aligned} 2 - x &\geq 2 - x + 1 \\ \therefore 2 - x - 2 &\geq -x + 1 - 2 \\ \therefore -x &\geq -x - 1 \\ \therefore 0 &\geq -1 \\ \therefore 0 &\geq -1 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} 2 - x &\geq 2 - x + 1 \\ \therefore 2 - x - 2 &\geq -x + 1 - 2 \\ \therefore -x &\geq -x - 1 \\ \therefore 0 &\geq -1 \\ \therefore 0 &\geq -1 \end{aligned}$ |
|--|--|

$$\therefore \text{مجموعة حل المتباينة الأصلية} =]-\infty, 1] \cap]-\infty, 2] =]-\infty, 1]$$



حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً



* من المعلوم أنه يمكن تمثيل

المعادلة الخطية :

$$2س + 3ص = 6 \text{ بيانياً}$$

بخط مستقيم كالتالي :

| | | |
|---|---|---|
| س | 0 | 3 |
| ص | 2 | 0 |

«ويمكن أخذ زوج مرتب ثالث

للتحقق من صحة الرسم»

* نلاحظ من الرسم أن هذا المستقيم يجزئ المستوى الكارتيزي إلى ثلاث مجموعات من النقط .

1 مجموعة نقط المستقيم ل (يسمى المستقيم الحدي) والتي كل منها يحقق أن : $2س + 3ص = 6$

2 مجموعة نقط المستوى التي تقع على أحد جانبي المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى)

ويرمز لها بالرمز ف، والتي كل منها يحقق أن : $2س + 3ص < 6$

3 مجموعة نقط المستوى التي تقع على الجانب الآخر من المستقيم ل (وتسمى نصف مستوى أيضاً)

ويرمز لها بالرمز ف، والتي كل منها يحقق أن : $2س + 3ص > 6$

ونستطيع من التوضيح السابق أن نستنتج أن :

- نصف المستوى ف، هو المنطقة التي تعبر عن مجموعة حل المتباينة : $2س + 3ص < 6$
- نصف المستوى ف، بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : $2س + 3ص \leq 6$
- نصف المستوى ف، هو المنطقة التي تعبر عن مجموعة حل المتباينة : $2س + 3ص > 6$
- نصف المستوى ف، بالإضافة إلى المستقيم ل تعبر عن مجموعة حل المتباينة : $2س + 3ص \geq 6$

خطوات حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً

1 نمثل معادلة المستقيم المرتبطة بالمتباينة

وذلك بخط متصل في حالة علامة التباين \leq ، \geq ، وبخط منقطع في حالة علامة التباين $<$ ، $>$ ،

2 نحدد نصف المستوى الذي تقع فيه منطقة الحل

وذلك بأخذ أي نقطة (س، ص) تنتمي إلى أحد نصفي المستوى كنقطة اختبار ونعوض بها في المتباينة .

- فإن حققنا كانت منطقة الحل تقع في هذا النصف.
- وإن لم تحققها كانت منطقة الحل تقع في نصف المستوى الآخر الذي لا تنتمي إليه نقطة الاختبار.

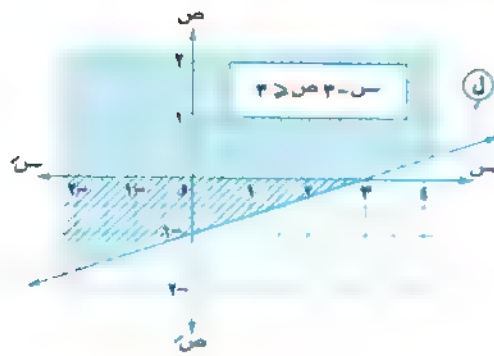
ملاحظة

للتسهيل يمكن اختيار نقطة الأصل (0, 0) كنقطة اختبار إذا كان المستقيم الحدى لا يمر بنقطة الأصل.

مثال ٤ .

مثل بيانًا مجموعة الحل للمتباينة : $س - ٣ ص \geq ٢$ في $س \times ص$

الحل .



١) نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

$$س - ٣ ص = ٢$$

(بخط متصل لأن علامة التباين \geq)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

| | | |
|---|----|---|
| س | ٠ | ٢ |
| ص | -١ | ٠ |

٢) نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار :

، النقطة (0, 0) تحقق المتباينة : (لأن : $٢ \geq ٠$)

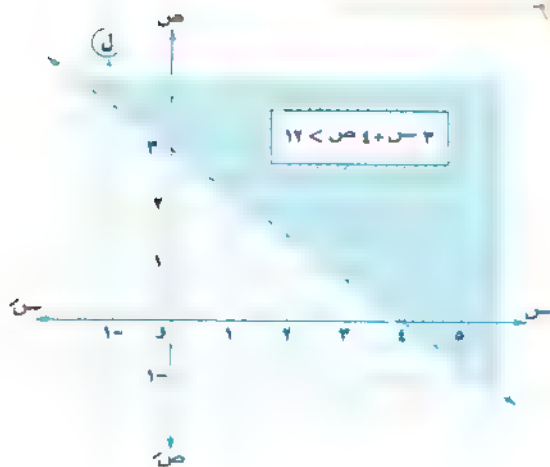
∴ مجموعة الحل للمتباينة هي المستقيم ل نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (0, 0) وتمثلها المنطقة المظلة فى الشكل السابق.

[لاحظ أنه يمكننا رسم المستقيم الحدى بدون تكوين الجدول السابق وذلك بالاستعانة بميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات كما درسنا فى الأعوام السابقة]

مثال ٥ .

مثل بيانًا مجموعة الحل للمتباينة : $س + ٤ ص < ١٢$ فى $س \times ص$

الحل .



١) نرسم المستقيم الحدى ل الذى معادلته :

$$س + ٤ ص = ١٢$$

(بخط متقطع لأن علامة التباين $<$)

بالاستعانة بالجدول الآتى :

| | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | ٤ |
| ص | ٣ | ٠ |

٢ نأخذ نقطة الأصل كنقطة اختبار

، $(0, 0)$ لا تحقق المتباينة (لأن $0 > 12$)

∴ مجموعة الحل للمتباينة هي نصف المستوى الذي لا تنتمي إليه النقطة $(0, 0)$ وتمثلها المنطقة المظلمة في الشكل السابق.

ملاحظات

- المعادلة : $x = 0$ تمثل بيانياً بمحور السينات.
- المعادلة : $y = 0$ تمثل بيانياً بمحور الصادات.
- المعادلة : $x = 4$ تمثل بيانياً بمستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة $(4, 0)$
- المعادلة : $y = 4$ تمثل بيانياً بمستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة $(0, 4)$
- معادلة المستقيم التي على الصورة : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ تمثل بيانياً بمستقيم يمر بالنقطتين $(a, 0)$ ، $(0, b)$

حاول بنفسك

مثل بيانياً مجموعة الحل للمتباينة : $2 - x - y \geq 10$ في $x \times y$

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانياً

لإيجاد الحل البياني لمتباينتين نتبع الآتي :

- ١ نظل المنطقة S_1 التي تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأولى.
 - ٢ نظل المنطقة S_2 التي تمثل مجموعة الحل للمتباينة الثانية.
- فتكون مجموعة حل المتباينتين معاً تمثلها منطقة التظليل المشتركة $S = S_1 \cap S_2$ حيث $S = S_1 \cap S_2$

مثال ٦

مثل بيانياً مجموعة الحل للمتباينتين : $x + y \geq 2$ ، $2x + y \geq 4$ في $x \times y$

الحل

| | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | ٢ |
| ص | ١ | ٠ |

١ نرسم المستقيم الحدي لـ : $x + y = 2$ (بخط متصل)

، ∴ النقطة $(0, 0)$ تحقق المتباينة (لأن $0 > 2$)

∴ المنطقة S_1 مجموعة حل المتباينة : $x + y \geq 2$

يمثلها لـ ١ نصف المستوى الذي تقع فيه نقطة الأصل [شكل (١١)]

٢ نرسم المستقيم الحدي لـ : $2x + y = 4$ (بخط متصل)

، ∴ النقطة $(0, 0)$ تحقق المتباينة (لأن $0 > 4$)

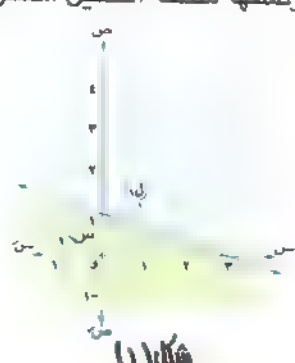
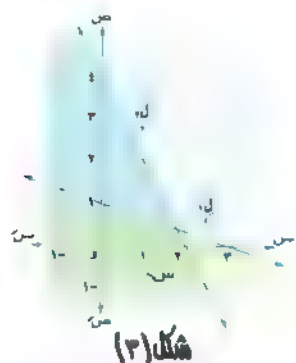
∴ المنطقة S_2 مجموعة حل المتباينة : $2x + y \geq 4$

، يمثلها لـ ١ نصف المستوى الذي تقع فيه نقطة الأصل [شكل (١٢)]

| | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | ٢ |
| ص | ٤ | ٠ |

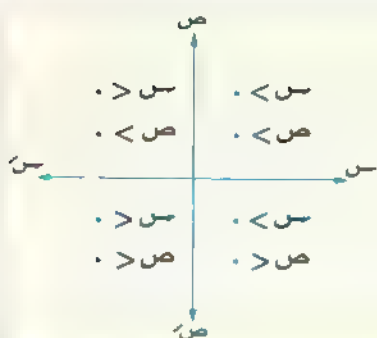
٣ مجموعة حل المتباينتين معاً هي : $S = S_1 \cap S_2$

وتمثلها منطقة التظليل المشتركة [شكل (٣)]



ملاحظة

محور الإحداثيات السيني والصادي يقسمان المستوى إلى ٤ أرباع :



- الربع الأول : حيث $س < ٠$ ، $ص < ٠$
- الربع الثاني : حيث $س > ٠$ ، $ص < ٠$
- الربع الثالث : حيث $س < ٠$ ، $ص > ٠$
- الربع الرابع : حيث $س > ٠$ ، $ص > ٠$

مثال ٧

مثل بياناً مجموعة الحل للمتباينات :

$$س \leq ٠ ، ص \leq ٠ ، ص + ٢س \geq ٩ ، ص - س \geq ١ \text{ في } ح \times ح$$

الحل

١ المتباينتان $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ مجموعة الحل لهما يمثلها $\overrightarrow{س}$ و $\overrightarrow{ص}$ لـ الربع الأول من المستوى.

٢ نرسم المستقيم الحدي لـ : $ص + ٢س = ٩$ (بخط متصل)

، : النقطة (٠ ، ٤.٥) تحقق المتباينة (لأن : $٩ > ٠$)

∴ المنطقة $س_١$ مجموعة حل المتباينة : $ص + ٢س \geq ٩$

، يمثلها لـ $\overrightarrow{س}$ نصف المستوى الذي تقع فيه نقطة الأصل [شكل (١)]

٣ نرسم المستقيم الحدي لـ : $ص - س = ١$ (بخط متقطع)

، : النقطة (٠ ، ١) تحقق المتباينة (لأن : $١ > ٠$)

∴ المنطقة $س_٢$ مجموعة حل المتباينة : $ص - س \geq ١$

، يمثلها نصف المستوى الذي تقع فيه نقطة الأصل [شكل (٢)]

| | | |
|---|---|---|
| س | ٢ | ٣ |
| ص | ٣ | ٠ |

| | | |
|---|---|----|
| س | ٠ | ١- |
| ص | ١ | ٠ |

٤ مجموعة الحل للمتباينات الأربعة تمثلها المنطقة الواقعة في الربع الأول والمشاركة في التظليل [شكل (٣)]



ملاحظة

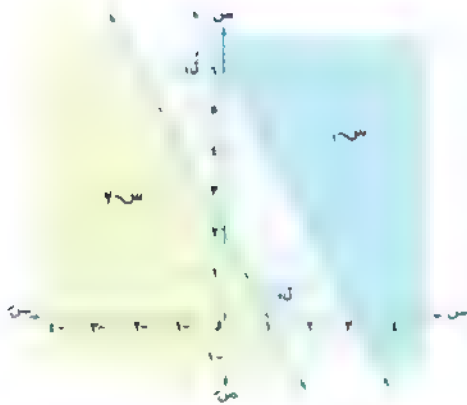
في المثالين السابقين رسمنا رسماً منفصلاً لتوضيح منطقة الحل لكل متباينة على حدة ثم جعلنا الشكل الأخير يوضح منطقة الحل لجملة المتباينات ويمكن للطالب بعد قليل من التمرين أن يستغنى عن هذه الأشكال ويكتفى بالشكل الأخير.

مثال ٨

مثل بيانياً مجموعة الحل للمتباينتين :

$$2x + y < 6, \quad x + 2y \geq 4 \text{ في } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

الحل



١ نرسم المستقيم الحدي لـ :

$$2x + y = 6 \text{ (بخط منقطع)}$$

وهو يمر بالنقطتين (٠، ٦) ، (٣، ٠)

، ∴ النقطة (٠، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل S_1 يمثلها نصف المستوى

الذي لا تقع فيه نقطة الأصل.

٢ نرسم المستقيم الحدي لـ : $x + 2y = 4$

(بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (٠، ٢) ، (٤، ٠)

، ∴ النقطة (٠، ٠) تحقق المتباينة.

∴ مجموعة الحل S_2 يمثلها المستقيم لـ U نصف المستوى الذي تقع فيه نقطة الأصل.

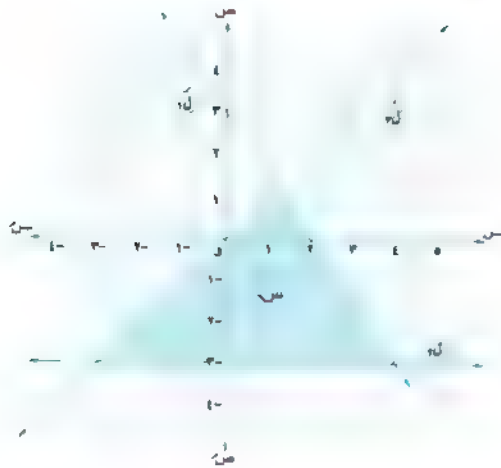
٣ مجموعة حل المتباينتين معاً هي : $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$

مثال ٩

مثل بيانياً مجموعة الحل لجملة المتباينات الآتية :

$$٣ - س + ٢ ص \geq ٦ ، ص + ٢ \leq ٠ ، س - ص < ٠ \text{ في } ح \times ح$$

الحل



١) نرسم المستقيم الحدى

$$ل١ : ٣ - س + ٢ ص = ٦ \text{ (خط متصل)}$$

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠) ،

، النقطة (٠ ، ٠) تحقق

المتباينة (لأن : $٦ > ٠$)

، مجموعة الحل $س١$ يمثلها

المستقيم $ل١$ لـ نصف المستوى

الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٢) نرسم المستقيم الحدى $ل٢ : ص + ٢ = ٠$ (خط متصل)

[مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، -٢)]

، النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة (لأن : $٠ < -٢$)

، مجموعة الحل $س٢$ يمثلها المستقيم $ل٢$ لـ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣) نرسم المستقيم الحدى $ل٣ : س - ص = ٠$ (خط متقطع)

وهو يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

، النقطة (٢ ، ٠) لا تحقق المتباينة (لأن : $٢ < ٠$)

، مجموعة الحل $س٣$ يمثلها نصف المستوى الذى لا تقع فيه النقطة (٢ ، ٠)

٤) مجموعة حل المتباينات الثلاث معاً هي : $س = س١ \cap س٢ \cap س٣$

وتمثلها المنطقة المظللة.

مثال ١٠

مصنع لإنتاج لعب الأطفال ينتج لعبة على شكل سيارة وأخرى على شكل طائرة يعمل بطاقة إنتاج يومية قدرها ٢٥٠ لعبة على الأكثر فإذا كانت تكلفة إنتاج السيارة الواحدة ١٥ جنيهاً ، تكلفة إنتاج الطائرة الواحدة ١٠ جنيهاً والتكلفة الإجمالية للإنتاج اليومي لا تزيد عن ٣٠٠٠ جنيه.

اكتب نظام متباينات خطية يمثل ما سبق ثم مثل بيانياً منطقة حل هذا النظام.

الحل

بفرض عدد السيارات المنتجة من سيارة ، الطائرات من طائرة.

• نظام المتباينات هو :

$$\begin{aligned} & \text{١} \quad س \leq ٠ \\ & \text{٢} \quad ص \leq ٠ \\ & \text{٣} \quad س + ص \geq ٢٥٠ \end{aligned}$$

$$\text{٤} \quad ١٥س + ١٠ص \geq ٣٠٠٠ \text{ أى أن } ٣س + ٢ص \geq ٦٠٠$$

• تعيين المنطقة التي تمثل مجموعة الحل للمتباينات كالتالى :

١ المتباينتان $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ يمثلها $س \geq ٠$ و $ص \geq ٠$ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى لـ : $س + ص = ٢٥٠$ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين $(٢٥٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٢٥٠)$

، النقطة $(٠ ، ٠)$ تحقق المتباينة (لأن $٢٥٠ > ٠$)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها المستقيم لـ $س + ص$ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل.

٣ نرسم المستقيم الحدى لـ : $٣س + ٢ص \geq ٦٠٠$ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين $(٢٠٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٣٠٠)$

، النقطة $(٠ ، ٠)$ تحقق المتباينة

(لأن $٦٠٠ > ٠$)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها

المستقيم لـ $٣س + ٢ص$ نصف المستوى الذى

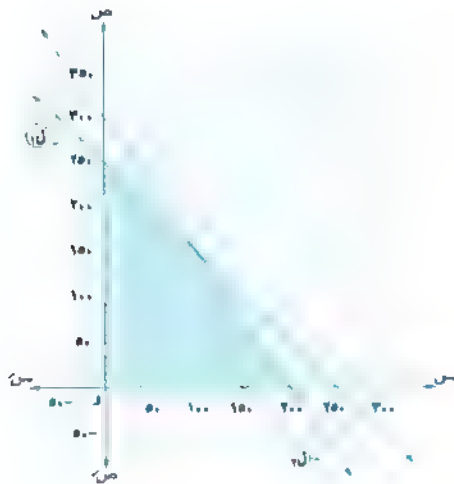
تقع فيه نقطة الأصل.

٤ الأزواج المرتبة التى كل من إحداثيها السببى

والصادى أعداد صحيحة بالمنطقة

المظللة بالشكل البيانى مجموعة الحل لنظام

المتباينات المطلوب.





اختر نفسك

مستويات عليا

على المتباينة الخطية - حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانياً

تمارين

6

من أسئلة الكتاب المدرسي

تذكر

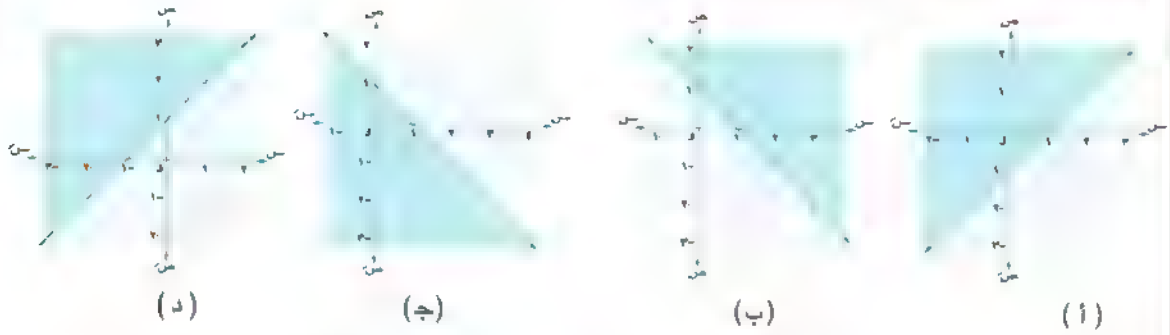
أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) مجموعة حل المتباينة : $1 - > -س \geq ١$ في ح هي
 - (١) $[١ ، ١ - [$ (ب) $]- ١ ، ١ [$ (ج) $\{١ ، ٠\}$ (د) $]١ ، ١ - [$
- (٢) مجموعة حل المتباينة : $١ \geq ٢ - س > ٥$ في ح هي
 - (١) $]٢ ، ١ [$ (ب) $[٢ ، ١ [$ (ج) $]٢ ، ١ [$ (د) $[٢ ، ١ [$
- (٣) الربع الذي يمثل حل نظام المتباينتين : $٠ < س$ ، $٠ < ص$ هو
 - (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- (٤) المنطقة التي تمثل مجموعة حل المتباينتين : $٠ < س$ ، $٠ > ص$ في ح هي الربع
 - (١) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- (٥) النقطة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينتين : $٠ < س$ ، $٠ > ص$ هي
 - (١) $(٢ - ، ٠)$ (ب) $(٠ ، ٢)$ (ج) $(٢ - ، ٢)$ (د) $(٢ ، ٢)$
- (٦) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينتين : $٢ < س$ ، $١ < ص$ هي
 - (١) $(٢ ، ١)$ (ب) $(١ ، ٢)$ (ج) $(١ ، ٢)$ (د) $(٢ ، ٢)$
- (٧) النقطة التي تقع في منطقة حل المتباينة : $س + ص \geq ٢$ هي
 - (١) $(٣ ، ١)$ (ب) $(٢ - ، ٢)$ (ج) $(٢ ، ٢)$ (د) $(٤ ، ١)$
- (٨) النقطة لا تقع في منطقة حل المتباينة : $س + ص \leq ٥$
 - (١) $(٦ ، ١ -)$ (ب) $(١ - ، ٥)$ (ج) $(٤ ، ١)$ (د) $(٤ ، ٢)$
- (٩) النقطة $(٢ ، ٢)$ تنتمي لمجموعة حل المتباينة : $٣ - س - ص$
 - (١) $>$ (ب) \geq (ج) $<$ (د) \leq
- (١٠) إذا كانت النقطة $(٣ ، ٢)$ تنتمي لمجموعة حل المتباينة : $س + ص \geq ٩$ فإن :
 - (١) $٥ < ٩$ (ب) $٥ \leq ٩$ (ج) $٥ > ٩$ (د) $٥ \geq ٩$
- (١١) إذا كانت : $(١ ، ص)$ تنتمي إلى منطقة حل المتباينة : $س + ٢ > ٧$ فإن :
 - (١) $٣ > ص$ (ب) $٣ < ص$ (ج) $٣ = ص$ (د) $٧ < ص$

- (١٢) النقطتان (٥ ، ٢) ، (٥ ، ١) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : $s + v \geq 8$
 (١) $<$ (ب) \leq (ج) $>$ (د) \geq
- (١٣) النقطة التي لا تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات : $s \leq 2$ ، $v \leq 0$ ، $s + v < 3$ هي
 (١) (١ ، ٣) (ب) (٢ ، ٢) (ج) (٢ ، ٣) (د) (١ ، ٢)
- (١٤) النقطة التي تنتمي إلى نظام حل المتباينات : $s < 3$ ، $v > 1$ ، $s + v \geq 5$ هي
 (١) (٢- ، ٦) (ب) (٢- ، ١) (ج) (٤ ، ٤) (د) (٢- ، ٣)
- (١٥) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينتين : $s + v > 2$ ، $v > 4$ ، $s + 2v > 6$ هي
 (١) (٤- ، ١) (ب) (١ ، ٢) (ج) (٢ ، ١) (د) (١- ، ٣)
- (١٦) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل نظام المتباينات : $s \leq 0$ ، $v \leq 0$ ، $s + 2v \leq 4$ ، $s + 2v \leq 8$ في $x \times y$ هي
 (١) (٠ ، ٣) (ب) (١ ، ٢) (ج) (٢ ، ٠) (د) (٣ ، ٠)
- (١٧) في المستوى الديكارتي : المنطقة التي تمثل مجموعة حل المتباينات : $1 \leq s \leq 5$ ، $2 \leq v \leq 4$ تكون منطقة
 (١) دائرية. (ب) مربعة. (ج) مثلثة. (د) مستطيلة.
- (١٨) مجموعة حل المتباينات : $s \leq 0$ ، $v \leq 0$ ، $s + v \geq 4$ تمثل منطقة مثلثة رؤوسها
 (١) (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٤) (ب) (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) (ج) (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤) (د) (٤ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠)
- (١٩) إذا كانت s هي مجموعة حل المتباينة : $s + v \geq 5$ ، v هي مجموعة حل المتباينة : $s + v > 5$ فإن :
 (١) $s = v$ (ب) $s \supset v$ (ج) $s \cap v = \emptyset$ (د) $s \supset v$
- (٢٠) إذا كانت f هي مجموعة حل المتباينة : $s + v > 4$ ، b هي مجموعة حل المتباينة : $s + v < 4$ فإن :
 (١) $b = f$ (ب) $f \supset b$ (ج) $b \supset f$ (د) $\emptyset = b \cap f$
- (٢١) إذا كانت النقط : (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (٤ ، ٠) هي رؤوس منطقة حل المتباينات : $s \leq 0$ ، $v \leq 0$ ، $s + 2v \geq 4$ فإن :
 (١) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

• (٢٢) أي الأشكال الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : $س + ص \leq ١$ ؟



• (٢٣) أي من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل للمتباينة : $٢ - س > ٢$ في $س \times ح$ ؟



• (٢٤) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة في $س \times ح$



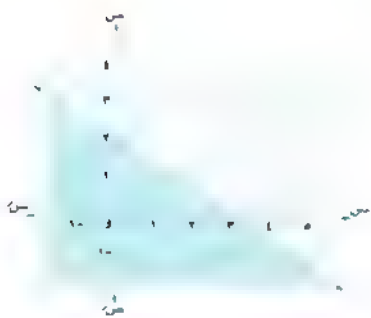
(أ) $س \geq ٢$

(ب) $س > ٢$

(ج) $س \leq ٢$

(د) $س < ٢$

• (٢٥) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة في $س \times ح$



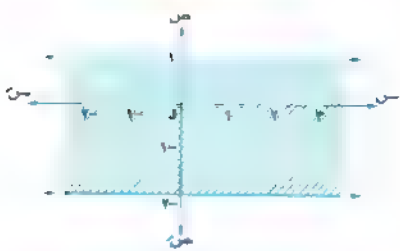
(أ) $س + ص > ٥$

(ب) $٢ - س + ٢ ص \geq ٦$

(ج) $٢ - س + ٢ ص > ٦$

(د) $٢ - س + ٢ ص > ٦$

• (٢٦) الشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينة في $س \times ح$



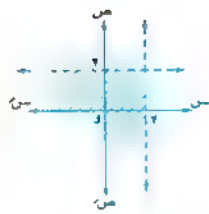
(أ) $١ > س \geq ٢ - ص$

(ب) $١ \geq س > ٢ - ص$

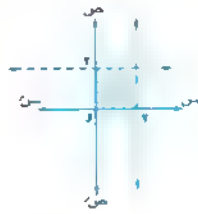
(ج) $١ > س \geq ٢ - ص$

(د) $١ \geq س > ٢ - ص$

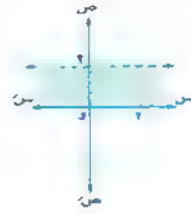
٢٧) أي من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : $0 \leq x < 2$ في $x \times x$ ؟



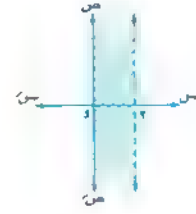
(أ)



(ب)

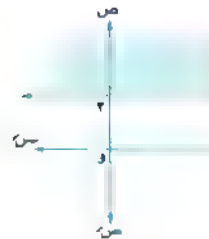


(ج)



(د)

٢٨) أي من الأشكال البيانية الآتية يمثل مجموعة حل المتباينة : $0 \leq x < 2$ في $x \times x$ ؟



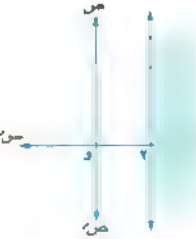
(أ)



(ب)

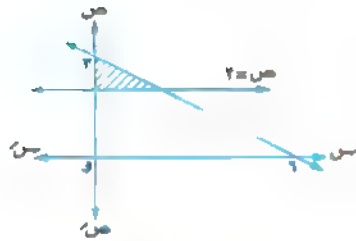


(ج)



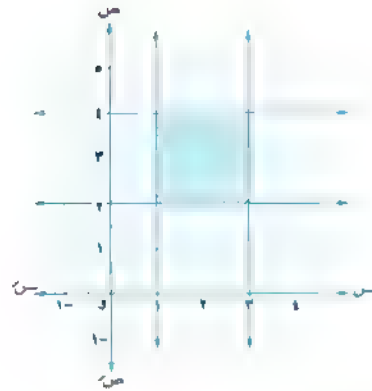
(د)

٢٩) المنطقة المظلمة في الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المتباينات :



- ص ≤ 2 ، ص ≤ 0 ،
 (أ) ص $2 + 6 \geq 0$ (ب) ص $2 + 6 \geq 0$
 (ج) ص $2 + 6 \leq 0$ (د) ص $2 + 6 \leq 0$

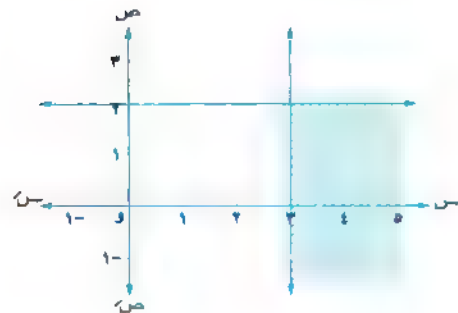
٣٠) الجزء المظلل في الشكل المقابل يمثل



مجموعة حل المتباينات

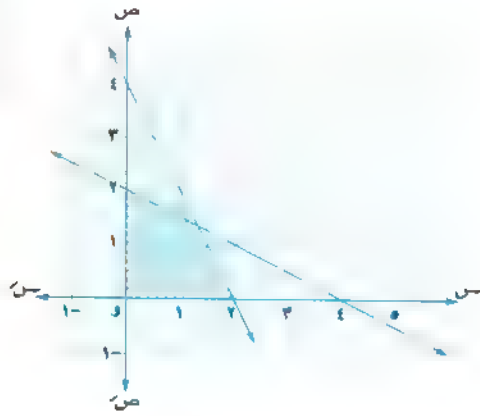
- (أ) ص $1 < 2$ ، ص $2 < 4$
 (ب) ص $1 > 2$ ، ص $2 > 4$
 (ج) ص $1 \geq 2$ ، ص $2 \geq 4$
 (د) ص $1 + 2 \leq 4$ ، ص $2 - 4 \geq 7$

٣١) الجزء المظلل في الشكل المقابل



يمثل مجموعة حل المتباينات

- (أ) ص $2 < 2$ ، ص $2 > 2$
 (ب) ص $2 \leq 2$ ، ص $2 \leq 2$
 (ج) ص $1 + 4 > 2$ ، ص $1 + 4 > 2$
 (د) ص $1 + 4 \leq 2$ ، ص $2 \geq 4$



(٣٢) الجزء المظلل في الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينات

(أ) $0 \leq s, 0 \leq v, s + 2v \geq 4$

$s + 2v \geq 4$

(ب) $s + 2v \geq 4, s + 2v \geq 4$

(ج) $0 < s, 0 < v, s + 2v > 4$

$s + 2v > 4$

(د) $s + 2v \geq 4, s + 2v \geq 4$

(٣٣) المنطقة المظلمة في الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المتباينات

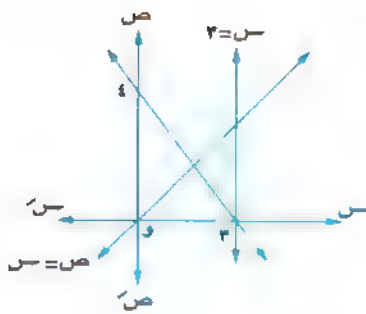
$s \leq 2, v \leq 4$ ،

(أ) $s + 2v \leq 12$

(ب) $s + 2v < 12$

(ج) $s + 2v \leq 12$

(د) $s + 2v \leq 12$



(٣٤) الجزء المظلل في الشكل المقابل

يمثل مجموعة حل المتباينة

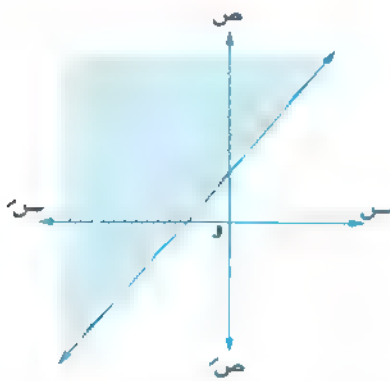
$s + b \geq c$ حيث

(أ) $c < 0, b < 0, c < 0$

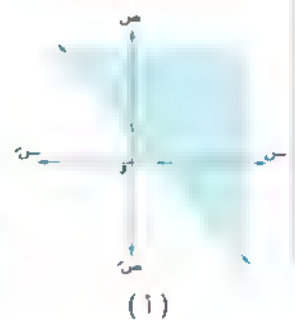
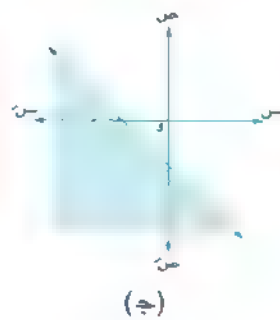
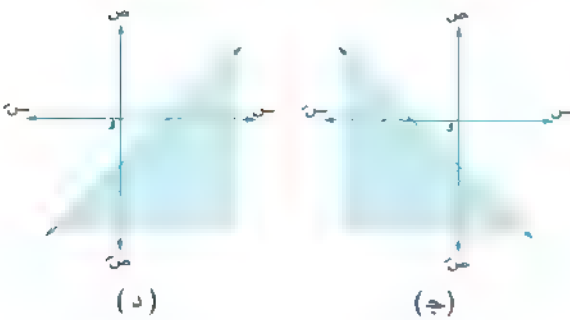
(ب) $c < 0, b > 0, c > 0$

(ج) $c < 0, b > 0, c < 0$

(د) $c > 0, b < 0, c > 0$

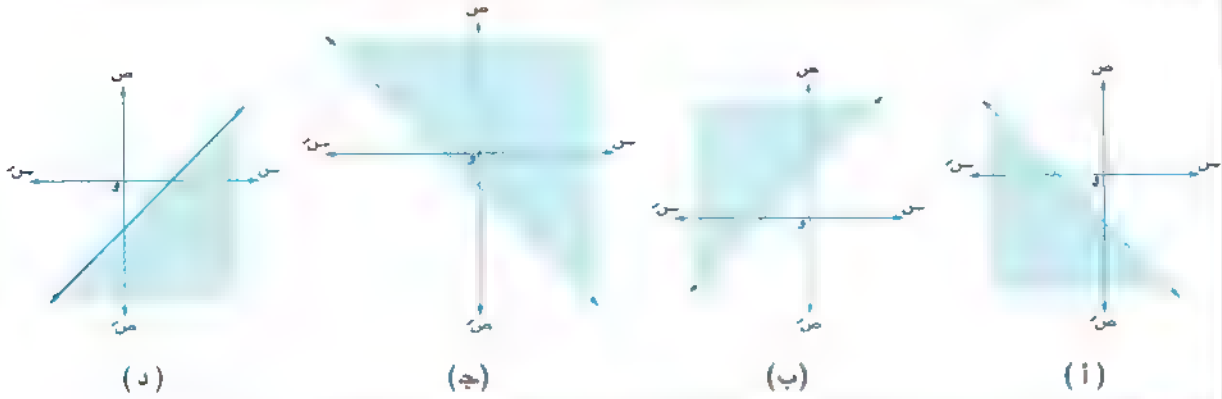


(٣٥) أي التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : $s + b \leq c$ حيث $c, b, s \geq 0$ ؟

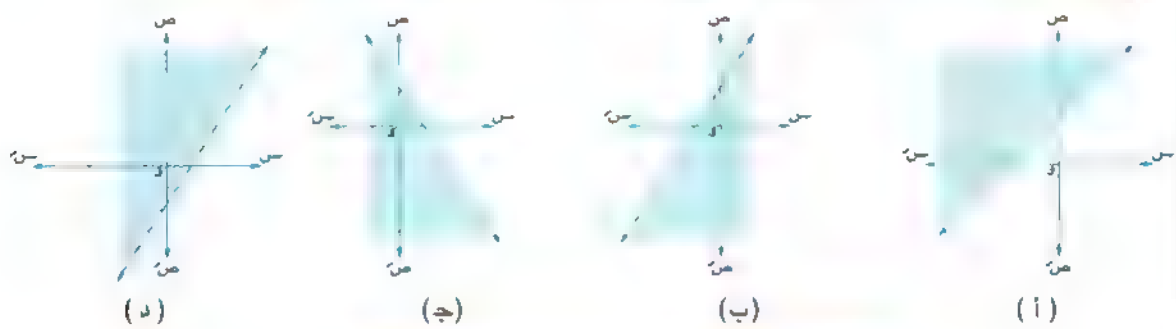


تذكر • مهم • تطبيق • مستويات عليا

٣٦ أي التمثيلات الآتية تصلح لتمثيل المتباينة : $س + ب \leq ح$ حيث $س \geq ١$ ، $ب \geq ٢$ ، $ح \geq ٣$ ؟



٣٧ إذا كان $س$ ، $ب$ عددين حقيقيين موجبين فإن أنسب تمثيل للمتباينة : $س \leq ١$ ، $ب \geq ٢$ هو



الأسئلة المتقالية

١ أوجد مجموعة الحل في $ح$ لكل من المتباينات التالية ممثلاً إيها على خط الأعداد :

| | |
|----------------|----------------|
| $٢ - س \geq ٥$ | $٢ - س \geq ٥$ |
| $٣ - س < ٩$ | $٣ - س < ٩$ |
| $٢ - س > ١$ | $٢ - س > ١$ |

٢ أوجد مجموعة الحل في $ح \times س$ لكل من المتباينات التالية بيانياً :

| | | |
|----------------|----------------|----------------|
| $٢ - س \leq ٦$ | $٢ - س \leq ٦$ | $٢ - س \leq ٦$ |
| $٢ - س < ٥$ | $٢ - س < ٥$ | $٢ - س < ٥$ |
| $٢ - س \geq ١$ | $٢ - س \geq ١$ | $٢ - س \geq ١$ |

٣ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانياً في $ح \times س$:

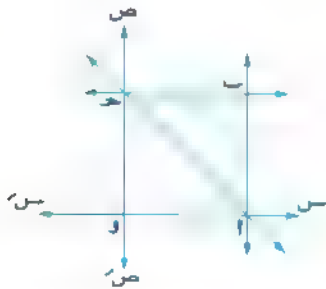
| | | |
|----------------|----------------|----------------|
| $٢ - س > ١$ | $٢ - س > ١$ | $٢ - س > ١$ |
| $٢ - س \geq ٠$ | $٢ - س \geq ٠$ | $٢ - س \geq ٠$ |

$$\begin{aligned} (6) \quad & \text{ص} < \text{س} , \text{س} - \text{ص} < 1 \\ (8) \quad & \text{س} + \text{ص} \geq 2 , \text{س} - \text{ص} < 1 \\ (10) \quad & \text{ص} > \text{س} + 1 , \text{ص} < \text{س} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & \text{ص} \leq 2 + \text{س} , 6 + \text{س} > 1 \\ (7) \quad & 2 - \text{ص} \leq 5 , 2 \leq \text{ص} + 2 \\ (9) \quad & \text{س} > 1 , \text{س} + \text{ص} \geq 1 \end{aligned}$$

حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانياً في $\text{س} \times \text{ص}$:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{س} \leq 0 , \text{ص} \leq 0 , \text{س} + \text{ص} \geq 5 \\ (2) \quad & \text{س} \geq 4 , \text{ص} > \text{س} + 2 , \text{س} + 2 \leq 2 \\ (3) \quad & \text{س} \leq 0 , \text{ص} \leq 0 , \text{ص} \leq 7 - 2 , \text{س} + 2 \leq 8 \\ (4) \quad & \text{س} \leq 0 , \text{ص} \leq 0 , 2 + \text{س} + \text{ص} \geq 6 , \text{س} + \text{ص} \geq 4 \\ (5) \quad & \text{ص} - \text{س} < 0 , 2 + \text{س} + 2 \leq 12 , \text{ص} + 6 > 2 + \text{س} \\ (6) \quad & \text{س} + 4 < \text{ص} , 4 + \text{س} + \text{ص} \leq 2 , \text{س} - \text{ص} > 1 \\ (7) \quad & 0 \leq \text{س} \leq 5 , 0 \leq \text{ص} \leq 2 , \text{س} \leq \text{ص} - 1 \\ (8) \quad & \text{س} \geq 4 , \text{ص} \geq 6 , 2 - \text{ص} - \text{س} \leq 2 , \text{ص} + 2 - \text{س} \leq 6 \\ (9) \quad & \text{س} + 4 > \text{ص} , 8 > \text{س} - 2 - \text{ص} , 0 \leq \text{س} < 4 \end{aligned}$$



في الشكل المقابل:

١ و٢ مربع مساحة سطحه ١٦ وحدة مربعة.
اكتب المتباينات التي تحقق مجموعة حل المنطقة
المظللة بالشكل المقابل.

مسائل تقيس مهارات التفكير

ثالثاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١. إذا كانت النقطة (٢، ٣) لا تنتمي لمجموعة حل المتباينة: $2 + \text{س} + \text{ص} < 3$ فإن
 - (أ) $2 + 2 + 3 < 3$ (ب) $2 + 2 + 3 > 3$ (ج) $2 + 2 + 3 \geq 3$ (د) $2 + 2 + 3 < -3$
- ٢. أي المتباينات الآتية لا تقع مجموعة حلها في الربع الثاني أو الثالث؟
 - (أ) $\text{س} < 0$ (ب) $\text{س} > 0$ (ج) $\text{ص} < 0$ (د) $\text{ص} > 0$
- ٣. إذا كانت مجموعة حل المتباينة: $2 + \text{س} + \text{ص} < 4$ لا تقع في الربع الثالث أو الرابع فإن
 - (أ) $4 < 0$ (ب) $4 > 0$ (ج) $4 = 0$ (د) $4 < 2$

تذكر • فهم • التطبيق • مستويات عليا

(٤) مجموعة حل المتباينتين : $س + ص < ٤$ ، $س - ص > ٤$ لا تقع في الربع

- (أ) الأول.
(ب) الأول أو الثاني.
(ج) الثاني أو الثالث.
(د) الثالث أو الرابع.

(٥) مجموعة حل المتباينة : $س \geq ص \geq س$ هي



(٦) إذا كان $س$ ، $ص$ عددين صحيحين فإن عدد حلول نظام المتباينات :

$$س < ٠ ، ص < ٠ ، س + ٢ ص \geq ٦ ، ٢ س + ص \geq ٦$$

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) عدد لا نهائي.

(٧) إذا كانت النقطتان (٤ ، ١) ، (١ ، ٤) تنتميان لمجموعة حل المتباينة : $س + ب \geq ح$

فأي النقط الآتية من المؤكد أن تنتمي لمجموعة الحل أيضًا ؟

- (أ) (٠ ، ٥) (ب) (٢ ، ٤) (ج) (٢ ، ٣) (د) (٤ ، ٢)

(٨) إذا كانت النقطة (٤ ، ٤) تقع على محور تماثل منطقة حل المتباينات

$$س + ص < ١ ، س - ص < ١$$
 فإن : $١ =$

- (أ) ٤ (ب) ٤ - (ج) ١ (د) صفر

(٩) إذا كانت مجموعة حل المتباينات : $س + ٢ ص < ٣$ ، $١ - س + ٤ ص \geq ١$ هي \emptyset

$$١٠ =$$

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(١٠) إذا كان : $س + ص \leq ١$ ، $س + ص \geq ١$ وكانت مجموعة حل النظام تساوي \emptyset فإن

- (أ) $١ < ب$ (ب) $١ > ب$ (ج) $١ = ب$ (د) $١ \geq ب$



يريد مربى حيوانات عمل حظيرة مستطيلة الشكل ، يجب أن لا يقل طول الحظيرة عن ٨٠ مترًا وأن لا يزيد محيطها عن ٣١٠ أمتار فما الأبعاد الممكنة للحظيرة ؟
(اكتب أربعة أبعاد ممكنة)

البرمجة الخطية والحل الأمثل



* **البرمجة الخطية :** هي إحدى الطرق التي تستخدم للحصول على أفضل الحلول لتحقيق هدف معين في ضوء القيود والإمكانات المتاحة والوصول إلى الحل الأمثل. بحيث يكون الهدف الذي نسعى لتحقيقه على صورة دالة خطية تسمى «دالة الهدف» وتكون القيود والإمكانات المتاحة على صورة مجموعة من المتباينات الخطية.

* **تعتمد طريقة البرمجة الخطية على :**

١ تمثيل نظام المتباينات الذي يعبر عن القيود بحيث نحصل على منطقة مضلعة تمثل «مجموعة الحل» وغالباً ما تشتمل القيود على المتباينتين $x \leq 0$ ، $y \leq 0$ وهذا يعنى أن منطقة الحل تقع فى الربع الأول.

٢ **تعيين دالة الهدف :** $z = Lx + My$ حيث L ، M ثابتان فنرسم المستقيم $Lx + My = 0$ الذى يمر بنقطة الأصل ثم نجعل هذا المستقيم يتحرك موازياً لنفسه لأعلى حتى يمر برؤوس المضلع الممثل لمجموعة حل المتباينات وحيث إن جميع هذه المستقيمات المتوازية تكون متساوية فى الميل ومختلفة فقط فى قيمة الحد المطلق (L) وكل نقطة (x ، y) تنتمى إلى مجموعة الحل وتنتمى لنفس المستقيم تعطى قيمة وحيدة للعدد (L) وبالتالي نستطيع أن نحدد أكبر قيمة أو أصغر قيمة لدالة الهدف .

فمثلاً إذا كانت مجموعة الحل الممثلة

لمجموعة المتباينات التى تمثل القيود

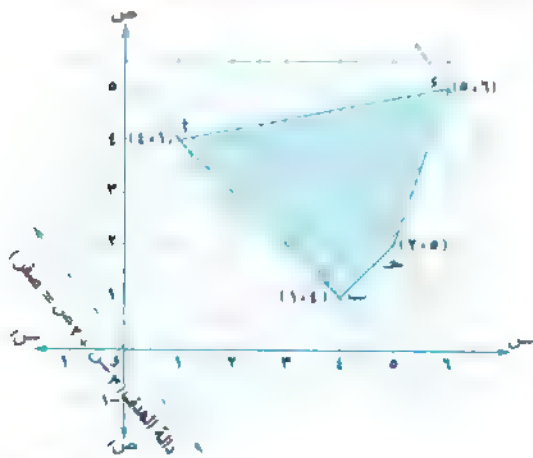
هى المنطقة المظللة فى الشكل المقابل

والمطلوب هو إيجاد أكبر وأقل قيمة

للمقدار : $z = 3x + 2y$

فإننا نعوض بالنقط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

(رؤوس المضلع) فى دالة الهدف



لاحظ أن

قيمة دالة الهدف عند أى نقطة تقع على ضلع من أضلاع المنطقة المظلة تكون محصورة بين قيمتيهما عند رأسى المضلع الواصل بينهما هذا الضلع

$$\therefore [س] = 4 \times 2 + 1 \times 3 = 11 ، [ر] = 1 \times 2 + 4 \times 3 = 14$$

$$[س] = 2 \times 2 + 5 \times 3 = 19 ، [ر] = 5 \times 2 + 6 \times 3 = 28$$

وبالتالى تكون أكبر قيمة هى 28 وذلك عند النقطة (6 ، 5) وأقل قيمة هى 11 وذلك عند النقطة (1 ، 4)

مثال ١

عين مجموعة حل المتباينات الآتية معاً بيانياً :

$$س \leq 0 ، ص \leq 0 ، س + 2ص \geq 8 ، 2س + 3ص \geq 12$$

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س ، ص) التى تجعل (س) أكبر ما يمكن حيث : $س + 5ص = ٧٥$

الحل

أولاً : لعين المنطقة التى تمثل مجموعة الحل للمتباينات :

١ المتباينتان : $س \leq 0 ، ص \leq 0$ يمثلها $س \leq 0$ و $ص \leq 0$ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى لـ $س + 2ص = 8$ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين (8 ، 0) ، (0 ، 4)

٣ نرسم المستقيم الحدى لـ $2س + 3ص = 12$ (بخط متصل)

وهو يمر بالنقطتين (6 ، 0) ، (0 ، 4)

\therefore مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظلة

بالشكل البيانى وهى المنطقة المضلعة أ ب ح و

لإيجاد نقطة ب جبرياً

نحل المعادلتين المثلثتين بالمستقيمين لـ $س$ ، لـ $ص$ حيث :

$$لـ : س + 2ص = 8 ، لـ : 2س + 3ص = 12$$

$$\text{فنجد أن : ب} = (3 ، 2)$$

ثانياً : لحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هى : أ (0 ، 4) ، ب (3 ، 2) ، ح (8 ، 0) ، و (0 ، 0)

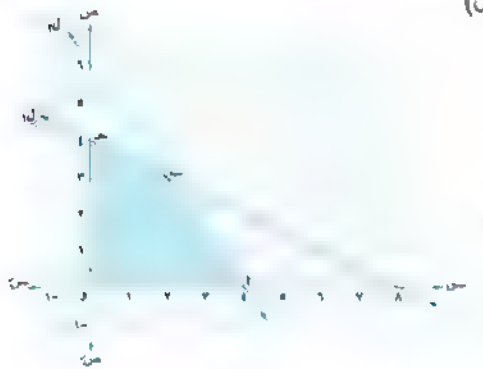
ثالثاً : لحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

$$\therefore \text{دالة الهدف } س + 5ص = ٧٥$$

$$\therefore [س] = 0 \times ٧٥ + 4 \times 5 = 20 ، [ر] = 3 \times ٧٥ + 2 \times 5 = ٢٢٥$$

$$[س] = 8 \times ٧٥ + 0 \times 5 = ٦٠٠ ، [ر] = 0 \times ٧٥ + 0 \times 5 = ٠$$

\therefore أكبر قيمة لدالة الهدف هى ٢٢٥ وذلك عند النقطة ب (3 ، 2)



المشكلات الحياتية المرتبطة بالبرمجة الخطية يمكن التعامل معها بالخطوات التالية :

- ١ تحليل الموقف أو المشكلة وذلك بتحديد المتغيرات والقيود والمعلومات المتاحة وتنظيمها في جدول.
- ٢ ترجمة القيود في صورة نظام من المتباينات الخطية.
- ٣ كتابة دالة الهدف.
- ٤ تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً وتحديد منطقة الحل.
- ٥ تحديد رؤوس منطقة الحل.
- ٦ إيجاد دالة الهدف عند كل رأس من الرؤوس السابقة لتحديد الرأس الذي يتحقق عنده الهدف المطلوب.



مثال

مخبز ينتج نوعين من الكعك ، يلزم للكعكة من النوع الأول ٢٠٠ جرام من الدقيق ، ٢٥ جراماً من الزبد ، ويلزم للكعكة من النوع الثاني ١٠٠ جرام من الدقيق ، ٥٠ جراماً من الزبد ، فإذا كانت كمية الدقيق المتاحة هي ٤ كجم فقط وكمية الزبد المتاحة هي $1\frac{1}{2}$ كجم فقط فأوجد أكبر عدد ممكن من الكعك يمكن عمله.

الحل

* نعرض أن : عدد الكعك من النوع الأول = x كعكة ، عدد الكعك من النوع الثاني = y كعكة

| النوع الأول | النوع الثاني | الكمية المتاحة |
|-------------|--------------|----------------|
| ٢٠٠ | ١٠٠ | ٤٠٠٠ |
| ٢٥ | ٥٠ | ١٢٥٠ |

* نظم المعلومات المتاحة في المشكلة في جدول :

* لترجم البيانات والقيود في صورة نظام من المتباينات :

$$1 \quad x \geq 0, y \geq 0$$

$$2 \quad 200x + 100y \geq 4000$$

$$3 \quad 25x + 50y \geq 1250$$

$$4 \quad \text{أي أن } x + y \geq 40$$

$$5 \quad \text{أي أن } x + y \geq 50$$

* نكتب دالة الهدف : $z = x + y$ حيث z أكبر ما يمكن.

* تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً وتحديد منطقة الحل :

$$1 \quad \text{المتباينتان } x \geq 0, y \geq 0$$

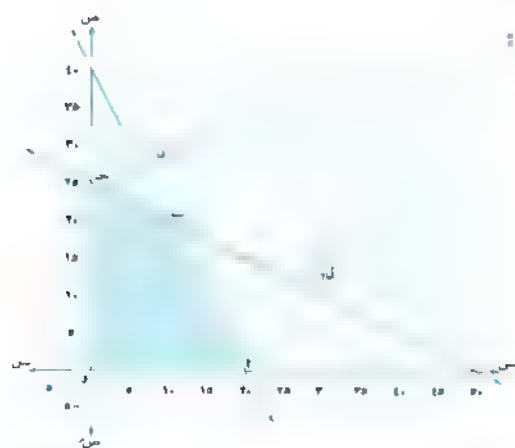
يمثلها $x \geq 0$ و $y \geq 0$ الربع الأول.

$$2 \quad \text{نرسم المستقيم الحدي لـ :}$$

$$x + y = 40 \quad (\text{بخط متصل})$$

وهو يمر بالنقطتين

$$(0, 40), (40, 0)$$



٣. نرسم المستقيم الحدى لـ : $س + ٢ ص = ٥٠$ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين $(٠, ٥٠)$ ، $(٢٥, ٠)$ ،
 ∴ مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل البياني وهي المنطقة المضلعة $أ ب ح و$

• **لحدد رؤوس منطقة الحل :**

رؤوس منطقة الحل هي : $أ (٠, ٢٠)$ ، $ب (٢٠, ١٠)$ ، $ح (٢٥, ٠)$ ، $و (٠, ٠)$

• **لحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

∴ دالة الهدف $م = س + ٢ ص$ ∴ $[م]_و = ٠ + ٠ = ٠$ صفر ، $[م]_أ = ٠ + ٢٠ = ٢٠$ ،

، $[م]_ب = ٢٠ + ١٠ = ٣٠$ ، $[م]_ح = ٢٥ + ٠ = ٢٥$ ،

∴ أكبر عدد من الكعك يتم صنعه هو ٣٠ كعكة منها ١٠ من النوع الأول ، ٢٠ من النوع الثانى.

مثال ٣

مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ويحقق ربحاً فى كل وحدة من النوع الأول ١٥ جنيهاً وربحاً لكل وحدة من النوع الثانى ٨ جنيهات ، وكان ما يباع من النوع الثانى لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول.
 أوجد عدد الوحدات التى يجب إنتاجها من كل نوع لكى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

الحل

• **نفرض ان :** عدد وحدات النوع الأول = $س$ ، عدد وحدات النوع الثانى = $ص$

• **لنظم المعلومات المتاحة فى المشكلة فى جدول :**

| الوحدة المنتجة | النوع الأول | النوع الثانى | الحد الأقصى |
|----------------|-------------|--------------|-------------|
| الربح | ١٥ | ٨ | - |
| | $س$ | $ص$ | ١٢٠ |

• **لترجم البيانات والقيود فى صورة نظام من المتباينات :**

$$١ \quad س \leq ٠ ، ص \leq ٠$$

$$٢ \quad س + ص \geq ١٢٠$$

$$٣ \quad ص \leq \frac{١}{٢} س$$

$$\therefore ص \leq \frac{١}{٢} س$$

$$\therefore ص - \frac{١}{٢} س \leq ٠$$

$$\therefore ٢ ص - س \leq ٠$$

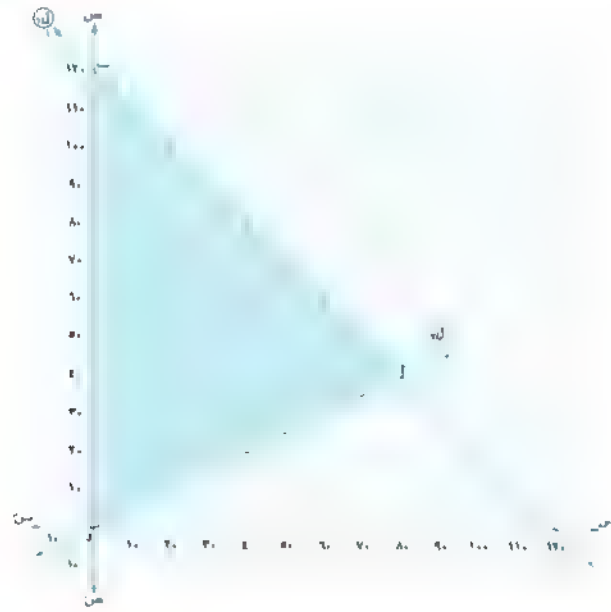
• **نكتب دالة الهدف :** $م = ١٥ س + ٨ ص$ حيث $م$ أكبر ما يمكن.

• **تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً وتحديد منطقة الحل :**

١ المتباينتان $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ يمثلهما $س \leq ٠$ و $ص \leq ٠$ الربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدى لـ : $س + ص = ١٢٠$ وهو يمر بـ $(١٢٠, ٠)$ ، $(٠, ١٢٠)$

٣] نرسم المستقيم الحدي لـ : ٢ ص - س = ٠ وهو يمر بـ (٠ ، ٠) ، (١٠ ، ٢٠)



∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهي المنطقة المثلثة و أ ب

• لحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هي : و (٠ ، ٠) ، أ (٤٠ ، ٨٠) ، ب (١٢٠ ، ٠)

• لحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

∴ دالة الهدف $م = ١٥ ص + ٨ س$ ∴ $[م]_و = ٠ + ٠ = ٠$

، $[م]_أ = ٤٠ \times ٨ + ٨٠ \times ١٥ = ١٥٢٠$ ، $[م]_ب = ١٢٠ \times ٨ + ٠ \times ١٥ = ٩٦٠$

∴ أكبر ربح ممكن هو ١٥٢٠ جنيهاً ويتحقق ذلك عند إنتاج ٨٠ وحدة من النوع الأول

، ٤٠ وحدة من النوع الثاني.

مثال ٤

وجبة غذائية يراد تكوينها من نوعين من الأطعمة فإذا كانت القطعة من النوع الأول تحتوي ٢ سعرات حرارية ،
٦ وحدات فيتامين ج ، والقطعة من النوع الثاني تحتوي ٦ سعرات حرارية ، ٤ وحدات فيتامين ج ، وكان الحد الأدنى من السعرات الحرارية الواجب توافره بالوجبة هو ٣٦ سعر ، والحد الأدنى من وحدات فيتامين ج هو ٤٨ وحدة ، وكان سعر القطعة من النوع الأول ٢ جنيهاً ومن النوع الثاني ٤ جنيهاً. فما عدد القطع التي يمكن أن تتضمنها الوجبة لتحقيق الحد الأدنى بأقل تكلفة ؟

الصل

* **نفرض أن :** عدد القطع من النوع الأول بالوجبة هو x ، عدد القطع من النوع الثاني بالوجبة هو y

* **لنظم المعلومات في جدول :**

| الحد الأدنى | القطعة من النوع الثاني | القطعة من النوع الأول | |
|-------------|------------------------|-----------------------|------------|
| ٣٦ | ٦ | ٢ | سعر حرارية |
| ٤٨ | ٤ | ٦ | فيتامين جـ |

* **لترجم البيانات والقيود في صورة نظام من المتباينات :**

$$١ \quad x \geq 0, y \geq 0$$

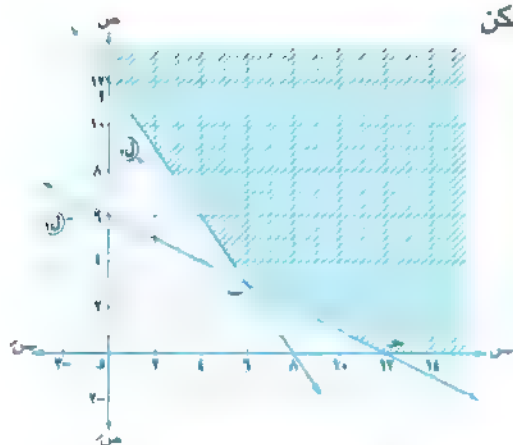
$$٢ \quad ٢٦ \leq ٢x + ٦y \quad \text{أي أن } ٢x + ٦y \leq ٢٦$$

$$٣ \quad ٤٨ \leq ٦x + ٤y \quad \text{أي أن } ٦x + ٤y \leq ٤٨$$

* **لكتب دالة الهدف :** $z = ٢x + ٤y$ حيث x أقل ما يمكن

* **تمثيل نظام المتباينات الخطية**

وتحديد منطقة الحل :



$$١ \quad \text{المتباينتان } x \geq 0, y \geq 0$$

يمثلها \overrightarrow{OX} و \overrightarrow{OY} والربع الأول.

٢ نرسم المستقيم الحدي لـ :

$٢٦ = ٢x + ٦y$ (بخط متصل) وهو يمر

بالنقطتين $(٠, ٤)$ ، $(٦, ٠)$

٣ نرسم المستقيم الحدي لـ : $٤٨ = ٦x + ٤y$ (بخط متصل) وهو يمر بالنقطتين $(٠, ٨)$ ، $(٨, ٠)$

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل والتي تحدّها النقط $A(٠, ٨)$ ، $B(٣, ٦)$ ، $C(٨, ٠)$

* **لحدد رؤوس منطقة الحل :** رؤوس منطقة الحل هي $A(٠, ٨)$ ، $B(٣, ٦)$ ، $C(٨, ٠)$

* **لحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :**

$$\therefore \text{دالة الهدف } z = ٢x + ٤y \text{ عند } A(٠, ٨) \quad z = ٢ \times ٠ + ٤ \times ٨ = ٣٢$$

$$z = ٢ \times ٣ + ٤ \times ٦ = ٣٠ \quad \text{عند } B(٣, ٦) \quad z = ٢ \times ٨ + ٤ \times ٠ = ١٦ \quad \text{عند } C(٨, ٠)$$

∴ أقل تكلفة للوجبة هي ٣٠ جنيهاً وذلك عندما تتكون من ٦ قطع من النوع الأول و ٣ قطع من النوع الثاني.

مسائل

تهدف شركة سياحة لاستئجار أسطول من الطائرات يستطيع نقل ٢٨٠٠ راكب ، ١٢٨ طن أمتعة على الأقل وكان متاح طرازان من الطائرات A ، B وكان عدد الطائرات المتاحة من الطراز A هو ١٣ طائرة ومن الطراز B هو ١٢ طائرة وكانت الحمولة كاملة لطائرة الطراز A هي ٢٠٠ راكب ، ٨ طن أمتعة وللطراز B هي ١٠٠ راكب ، ٦ طن أمتعة وكان إيجار الطائرة من الطراز A هو ٢٤٠ ألف جنيه ، من الطراز B هو ١٠٠ ألف جنيه. فكم طائرة من كل طراز يمكن استئجارها لتحقيق الهدف بأقل تكلفة ؟

الحل

* نفرض أن : عدد طائرات الطراز أ هو x ، عدد طائرات الطراز ب هو y

* لنظم المعلومات المتاحة بالمسألة في جدول :

| طراز (أ) | طراز (ب) | الحد الأدنى |
|---------------|----------|-------------|
| عدد الركاب | ٢٠٠ | ٢٨٠٠ |
| الامتعة بالطن | ٨ | ١٢٨ |

* نترجم البيانات والقيود في صورة نظام من المتباينات :

$$1 \quad x \geq 12, y \geq 12$$

$$2 \quad 200x + 100y \leq 2800 \quad \text{أي أن } 2x + y \leq 28$$

$$3 \quad 8x + 6y \leq 128 \quad \text{أي أن } 2x + y \leq 16$$

* نكتب دالة الهدف : $z = 240x + 100y$ حيث z أقل ما يمكن

* تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً وتحديد منطقة الحل :

1) نرسم المستقيم الحدي لـ :

$x = 12$ يوازي محور الصادات

ويقطع محور السينات

في النقطة $(12, 0)$

2) نرسم المستقيم الحدي لـ :

$y = 12$ يوازي

محور السينات ويقطع

محور الصادات

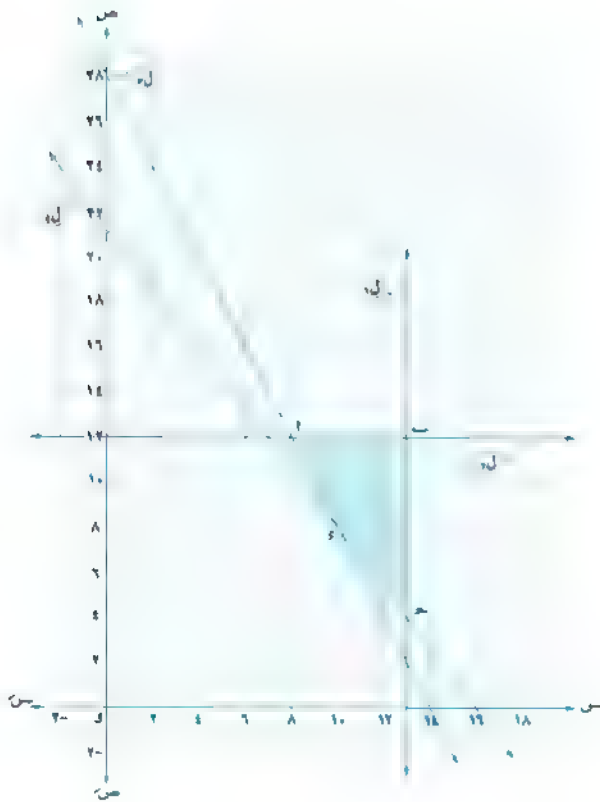
في النقطة $(0, 12)$

3) نرسم المستقيم الحدي لـ :

$2x + y = 28$

وهو يمر بالنقطتين

$(0, 28)$ ، $(14, 0)$



٤ نرسم المستقيم الحدى لـ : $4س + 3ص = 64$ وهو يمر بالنقطتين (١٠ ، ٢٠) ، (١٦ ، ٠)

∴ منطقة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل وهي المنطقة المضلعة أ ب ح د

* نحدد رؤوس منطقة الحل :

رؤوس منطقة الحل هي :

$$أ (١٢ ، ٨) ، ب (١٢ ، ١٣) ، ج (٤ ، ١٣) ، د (١٠ ، ٨)$$

* نحدد قيمة دالة الهدف عند كل رأس :

$$∴ دالة الهدف م = ٢٤٠س + ١٠٠ص$$

$$∴ [م]_أ = ٣١٢٠ = ١٢ \times ١٠٠ + ٨ \times ٢٤٠$$

$$، [م]_ب = ٤٣٢٠ = ١٢ \times ١٠٠ + ١٣ \times ٢٤٠$$

$$، [م]_ج = ٣٥٢٠ = ٤ \times ١٠٠ + ١٣ \times ٢٤٠$$

$$، [م]_د = ٣٢٠٠ = ٨ \times ١٠٠ + ١٠ \times ٢٤٠$$

∴ أقل تكلفة تحقق الهدف هي عند استئجار ٨ طائرات من الطراز أ ، ١٢ طائرة من الطراز ب وتكون

التكلفة ٣٢٠٠٠٠٠ جنية.

حاول بنفسك

مصنع ينتج نوعين من قطع الغيار أ ، ب وإنتاج قطعة من النوع أ يلزم تشغيل ماكينتين الأولى لمدة ساعة والثانية لمدة ساعتين ونصف ، وإنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولى لمدة ٤ ساعات والثانية لمدة ساعتين. فإذا كانت الماكينة الأولى لا تعمل أكثر من ٨ ساعات يوميًا والثانية لا تعمل أكثر من ٢١ ساعة يوميًا وكان مكسب المصنع ٢٤ ، ٤٠ جنيهاً في كل قطعة من النوعين أ ، ب على الترتيب فأوجد أكبر مكسب يمكن أن يحصل عليه في اليوم الواحد.



اختر نفسك

مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسي • تفكر • فهم • تطبيق

تمارين

7

على البرمجة الخطية والحل الأمثل

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١) النقطة التي تكون عندها للدالة $z = 4x + 2y$ من القيم العظمى من النقاط الآتية هي
 (١) $(0, 0)$ (ب) $(0, -4)$ (ج) $(10, 10)$ (د) $(20, 0)$
- ٢) النقطة التي تكون عندها للدالة $z = 25x + 10y$ من القيم صغرى من النقاط الآتية هي
 (١) $(0, 0)$ (ب) $(10, 0)$ (ج) $(40, 0)$ (د) $(10, 20)$
- ٣) إذا كان ضعف العدد x لا يقل عن ثلاثة أمثال العدد y فإن
 (١) $2x > 3y$ (ب) $2x \geq 3y$
 (ج) $2x < 3y$ (د) $2x \leq 3y$
- ٤) أى التعبيرات الآتية يمثل المتباينة $x + y \geq 15$ ؟
 (١) عدنان مجموعهما أقل من ١٥ (ب) عدنان مجموعهما لا يقل عن ١٥
 (ج) عدنان مجموعهما يزيد عن ١٥ (د) عدنان مجموعهما لا يزيد عن ١٥
- ٥) أى التعبيرات الرمزية يمثل الجملة الآتية :
 عدنان مجموع أحدهما وضعف الآخر لا يزيد عن ٢٠ ؟
 (١) $x + 2y < 20$ (ب) $x + 2y \leq 20$
 (ج) $x + 2y > 20$ (د) $x + 2y \geq 20$
- ٦) أى التعبيرات اللفظية يمثل المتباينة : $x \leq 2y$ ؟
 (١) عدنان أحدهما أكبر من ضعف الآخر. (ب) عدنان أحدهما لا يزيد عن ضعف الآخر.
 (ج) عدنان أحدهما يقل عن ضعف الآخر. (د) عدنان أحدهما لا يقل عن ضعف الآخر.
- ٧) النقطة التي تنتمي لمنطقة حل المتباينات : $x + y \leq 5$ ، $x \leq 1$ ، $y \leq 2$ وتجعل دالة الهدف $z = 2x + y$ من أقل ما يمكن من النقاط التالية هي
 (١) $(0, 0)$ (ب) $(2, 4)$ (ج) $(2, 3)$ (د) $(4, 1)$
- ٨) القيمة العظمى للدالة $z = 5x + 2y$ من تحت الشروط $x \leq 0$ ، $y \leq 0$ ، $x + y \geq 7$ ، $x + 2y \geq 10$ هي ..
 (١) ١٠ (ب) ٢٦ (ج) ٣٥ (د) ٧٠
- ٩) النقطة التي تنتمي لمنطقة حل المتباينتين : $0 \leq x \leq 5$ ، $0 \leq y \leq 2$ وتجعل دالة الهدف $z = 2x + 3y$ من أكبر ما يمكن هي
 (١) $(5, 4)$ (ب) $(1, 6)$ (ج) $(0, 0)$ (د) $(2, 5)$

(١٠) أقل قيمة للمقدار $3س - 2ص$ تحت الشروط $3 \leq س \leq 7$ ، $6-ص \leq 5$ تساوى

(١) ٣ (ب) ١٩- (ج) ٢٨- (د) ١١

(١١) إذا كان (٩ ، ٥) ينتمى لمجموعة حل المتباينة $س + 2ص \leq 5$ حيث ٩ ، ٥ عدنان صحيحان فإن أقل قيمة للمقدار $2س + 4ص =$

(١) ٥ (ب) ٥- (ج) ١٠ (د) ٦

(١٢) إذا كانت دالة الهدف (س) تأخذ القيمتين ٦١ ، ٥٧ عند النقطتين (٤ ، ٧) ، (٥ ، ٦) على الترتيب فإن دالة الهدف (س) يمكن أن تساوى

(١) $س + ٥ص$ (ب) $٧س + ٣ص$ (ج) $٣س + ٧ص$ (د) $٥س + ٢ص$

(١٣) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل

لنظام من المتباينات فإن دالة

الهدف $س + ٥ص$ تكون

أصغر ما يمكن عند

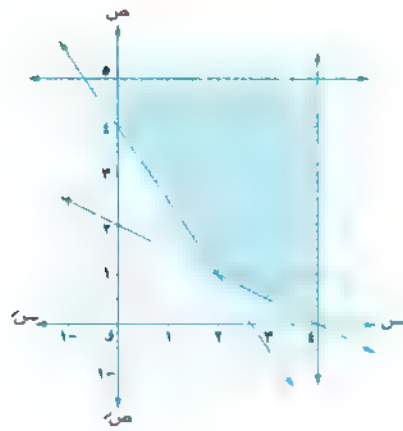
النقطة ..

(١) (٠ ، ٠)

(ب) (٢ ، ١)

(ج) (١ ، ٢)

(د) (٥ ، ٤)



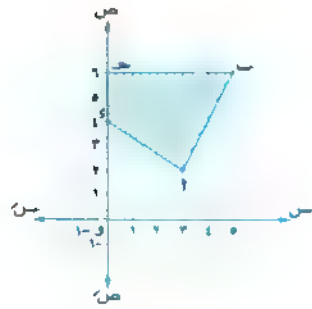
(١٤) الشكل المقابل يمثل منطقة الحل لنظام

من المتباينات فإن القيمة الصغرى لدالة

الهدف $س + ٣ص =$ هي

(١) ٦ (ب) ٨

(ج) ١٢ (د) ١٣



(١٥) في الشكل المقابل :

المنطقة المظلة تمثل مجموعة حل المتباينات

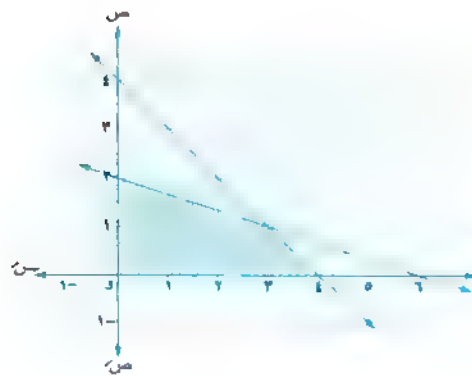
$س \leq ٥$ ، $٥ \leq ٣س + ٢ص$ ، $٦ \geq ٣س + ٢ص$ ،

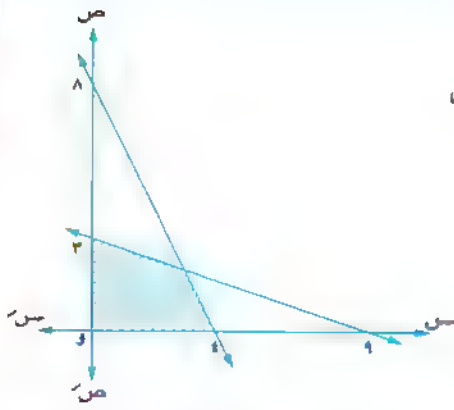
فإن القيمة العظمى

لدالة الهدف $س + ٢ص =$ تساوى

(١) ٧ (ب) ٨

(ج) ٣ (د) ٤





١٦ إذا كانت المنطقة المظلة هي حل لإحدى مسائل البرمجة الخطية وكانت دالة الهدف هي $س + ٥ ص = ٨$ فإن القيمة العظمى لدالة الهدف تساوى

(أ) ٢٤

(ب) ٣١

(ج) ٤٥

(د) ٦٤

١٧ مصنع طاقته الإنتاجية ١٢٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع ، س ، ص على الترتيب فإذا كان ما يباع من النوع الثاني لا يقل عن نصف ما يباع من النوع الأول أى من أنظمة المتباينات الآتية تمثل البيانات والقيود السابقة ؟

(أ) $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ، $س + ص \geq ١٢٠$ ، $٢ص \geq س$

(ب) $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ، $س + ص \leq ١٢٠$ ، $٢ص \geq س$

(ج) $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ، $س + ص \geq ١٢٠$ ، $٢ص \leq س$

(د) $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ، $س + ص \geq ١٢٠$ ، $٢ص \leq س$

١٨ فى إحدى مسائل البرمجة الخطية كانت دالة الهدف $س + ٤ ص$ لها قيمة عظمى عند رأسين من رؤوس المنطقة المظلة التى تمثل الحل فإن عدد النقط التى تجعل دالة الهدف قيمة عظمى يساوى

(د) عدد لانهاى.

(ج) ٤

(ب) ٢

(أ) ٢

الأسئلة المتقالية

ثانياً

١ مثل كلاً من أنظمة المتباينات التالية ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف فى كل حالة :

(١) $س + ٥ ص \geq ٥$ ، $ص \leq ١$ ، $س \leq ٢$

«(٢ ، ١)»

، دالة الهدف $س + ٢ ص = ٣$ أصغر ما يمكن.

(٢) $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ، $س + ٢ ص \geq ١٠$ ، $س + ٤ ص \geq ١٢$

«(٠ ، ٥)»

، دالة الهدف $س + ٢ ص = ٥$ أكبر ما يمكن.

(٣) $س \leq ٠$ ، $ص \leq ٠$ ، $٢ ص + س \leq ١٥$ ، $٤ ص + ٣ ص \leq ٢٤$

«(٤ ، ٣)»

، دالة الهدف $س + ٢ ص = ٢$ أقل ما يمكن.

(٤) $س - ص \geq ٣$ ، $٢ ص + ٣ ص \leq ٦$ ، $س - ٢ \leq ٢$ ، $ص \geq ٥$

«(٠ ، ٣)»

، دالة الهدف $س - ٢ ص = ٣$ أكبر ما يمكن.

٢ أوجد أكبر وأقل قيمة لدالة الهدف : $س + ٢ ص - ٥$ حيث : (س ، ص) تنتمى لمنطقة حل نظام

المتباينات : $٣ \leq س \leq ٤$ ، $٢ + ٣ ص \leq ٦$ ، $٤ + ٣ ص \geq ١٢$ ، $٣ + ٤ ص \leq ١٢$

«٧ ، ١٧»

٣ علم يوسف أنه للحفاظ على وزنه يجب عليه حرق السرعات الحرارية الزائدة عن طريق ممارسة المشي والجري فوجد أن ممارسة المشي لمدة دقيقة واحدة تحرق ٦ سرعات حرارية وممارسة الجري لمدة دقيقة واحدة تحرق ١٥ سعر حراري ، وكان يوسف يمشي ما بين ١٠ ، ٢٠ دقيقة يوميًا ويجري ما بين ٣٠ ، ٤٥ دقيقة يوميًا ، وكان الوقت المتاح لممارسة المشي والجري يوميًا لا يزيد عن ساعة واحدة فكم دقيقة يجب أن يمارس فيها يوسف المشي وكم دقيقة يمارس فيها الجري يوميًا ليحرق أكبر قدر ممكن من السرعات الحرارية. «١٥ ، ٤٥ دقيقة»

٤ ينتج مصنع صغير للأثاث المعدني ٢٠ دولابًا أسبوعيًا على الأكثر من نوعين مختلفين ؟ ، ب ، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهاً وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه ، وكان ما يباع من النوع الأول لا يقل عن ثلاثة أمثال ما يباع من النوع الثاني. أوجد عدد النوايب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن. «١٥ ، ٥٠»

٥ يرغب مزارع في تربية دجاج ويط فإذا كان المكان الذي سيربى فيه هذه الطيور لا يتسع إلا لثلاثمائة فقط من الطيور وهو يرى ألا يقل عدد الدجاج عن ضعف عدد البط فإذا كان ربحه في كل دجاجة جنيهاً واحدًا وفي كل بطة جنيهاًين. أوجد عدد ما يربيه المزارع من كل نوع حتى يحصل على أكبر ربح ممكن. «٢٠٠ ، ١٠٠»

٦ يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية ؟ ، ب ، ولا تقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة ، كما أنه لا يستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ) ، ولا يستخدم أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب) ، فإذا علمت أن ثمن السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهاً ، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهاً ، كم سمكة من كل من النوعين ؟ ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء ؟ «١٥ ، ٣٥»

٧ ينتج أحد مصانع الآلات الموسيقية نوعين من آلات النفخ ، يحتاج تصنيع النوع الأول ٢٥ وحدة من النحاس ، ٤ وحدات من النيكل ، ويحتاج تصنيع النوع الثاني ١٥ وحدة من النحاس ، ٨ وحدات من النيكل ، فإذا كانت الكمية المتاحة في المصنع في أحد الأيام ٩٥ وحدة من النحاس ، ٢٢ وحدة من النيكل ، وكان ربح المصنع في الآلة من النوع الأول هو ٦٠ جنيهاً وربحه في الآلة من النوع الثاني ٤٨ جنيهاً ، فما عدد الآلات التي يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟ «٢ ، ٣»

٨ افترض أنك تُصنع وتبيع مرطباً للجلد ، وإذا كان تصنيع عبوة المرطب العادي يستلزم ٢ سم^٢ من الزيت ، ١ سم^٣ من زبدة الكاكاو ، وكان تصنيع عبوة المرطب من النوع الممتاز يستلزم ١ سم^٢ من الزيت ، ٢ سم^٣ من زبدة الكاكاو ، سوف يكون ربحك هو ١٠ جنيهاً لكل عبوة من النوع العادي ، ٨ جنيهاً لكل عبوة من النوع الممتاز. فإذا كان لديك ٢٤ سم^٢ من الزيت ، ١٨ سم^٣ من زبدة الكاكاو ، فما عدد العبوات التي يمكن تصنيعها من كل نوع ، حتى تحصل على أكبر ربح ممكن ، وما هذا الربح ؟ «١٠ ، ٤»

٩ سلعتان غذائيتان الأولى بها ٥ وحدات فيتامين وتعطى ٣ سعر حراري والثانية بها وحدتان فيتامين وتعطى ٦ سعر حراري ، فإذا كان المطلوب ٢٥ وحدة فيتامين على الأقل ، ٢٩ سعر حراري على الأقل وكان ثمن الوحدة من السلعة الأولى ٦ جنيهاً وثمان الوحدة من السلعة الثانية ٨ جنيهاً. فما هي الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟ «٣ ، ٥٠»

١٠ ينتج مصنع نوعين من المكاتب الصاج وكل نوع يقوم بتجميعه أحد العمال ثم يقوم عامل آخر بالدهان ، يستغرق العامل الأول ساعتين لتجميع الوحدة من النوع الأول ، و ٢ ساعات لتجميع الوحدة من النوع الثاني ، بينما يستغرق العامل الثاني ساعة ونصف الساعة لدهان الوحدة من النوع الأول وساعتين لدهان الوحدة من النوع الثاني ، فإذا كان العامل الأول يعمل ٦ ساعات يوميًا على الأقل ، بينما يعمل العامل الثاني ٦ ساعات يوميًا على الأكثر ، وكان ربح المصنع هو ٥٠ جنيهًا في كل وحدة من كل من النوعين ، فما عدد الوحدات التي يجب أن ينتجها المصنع يوميًا من كلا النوعين ليحقق أكبر ربح ممكن ؟

٤ من النوع الأول»

١١ مصنع ينتج نوعين من الصابون ١ ، ب فإذا كان إنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ١ يحتاج إلى ٣٠ كجم من المواد الخام ، ١٨ ساعة من التشغيل على الماكينات ، وإنتاج ما قيمته ١٠٠ جنيه من المنتج ب يحتاج إلى ٢٠ كجم من نفس المواد الخام ، ٢٤ ساعة من التشغيل على الماكينات. أوجد أكبر قيمة للمنتجات التي تنتج من ٧٥ كجم من المواد الخام ، ٧٢ ساعة من التشغيل على الماكينات.

٢٢٥ جنيهًا»

١٢ ترزيان ينتجان نموذجين من البلوزات (١) ، (ب) فيقوم الترزي الأول بتفصيل القماش بينما يقوم الثاني بخياطته ، فإذا كان الترزي الأول يستغرق ساعة في تفصيل النموذج (١) وساعتين في تفصيل النموذج (ب) ، وكان الترزي الثاني يستغرق ٣ ساعات لخياطة النموذج (١) وساعة واحدة لخياطة النموذج (ب) ، وكان الترزي الأول يعمل في اليوم ٨ ساعات على الأكثر بينما يعمل الثاني ٩ ساعات في اليوم على الأكثر وكان مكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (١) هو ١٠ جنيهات ومكسبهما من بيع البلوزة من النموذج (ب) هو ١٥ جنيهًا. فأوجد عدد البلوزات من كل نموذج التي يمكنهما إنتاجه في اليوم ليحصلوا على أكبر ربح ممكن.

٢ ، ٣»

ثالثًا مسائل تحسب مهارات التفكير

يراد وضع نوعين من الكتب (١) ، (ب) على رف مكتبة طوله ٩٦ سم وحمولته القصوى ٢٠ كجم فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم وسمك الكتاب من النوع (١) ٦ سم ومن النوع (ب) ٤ سم فأوجد عدد الكتب من كل نوع التي توضع على الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن «فسر وجود عدة حلول».

3

الوحدة

حساب المثلثات

دروس الوحدة

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |

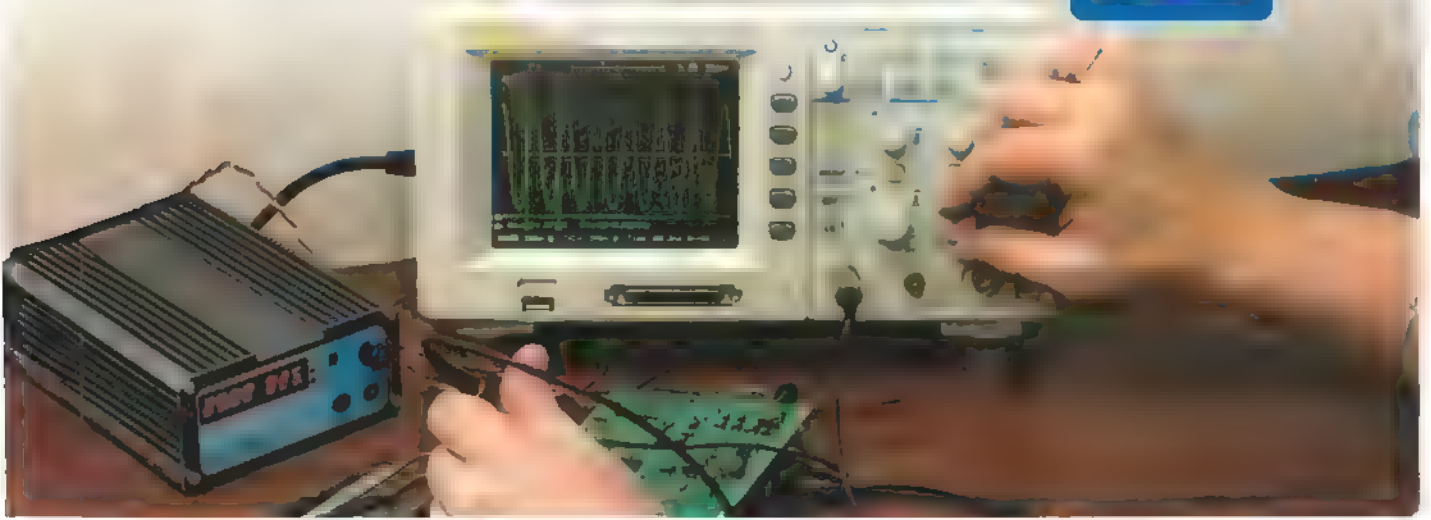


نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يستنتج العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية.
- يثبت صحة متطابقات على الدوال المثلثية.
- يحل المثلث القائم الزاوية.
- يحدد ما إذا كانت المتساوية متطابقة أم معادلة مثلثية.
- يتعرف على القطاع الدائرى ويوجد مساحته.
- يحل المعادلات المثلثية البسيطة فى الصورة العامة فى الفترة $[-\pi, \pi]$
- يتعرف على الحل العام للمعادلة المثلثية.
- يتعرف على القطعة الدائرية ويوجد مساحتها.
- يوجد مساحة المثلث ومساحة الشكل الرباعى ومساحة المضلع المنتظم.
- يستخدم أنشطة لبرامج الحاسب الآلى.

المتطابقات المثلثية



المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطابقة

هي متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذي يُعرف به كل طرف من طرفي المتساوية.

فمثلاً المتساوية : $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ تسمى متطابقة لأنها صحيحة لجميع قيم المتغير θ الحقيقية.

وذلك لأن : **في الشكل المقابل :**



من دراستنا السابقة للعلاقة بين الزاويتين المنتسبتين θ ، $(-\theta)$

وجدنا أن : النقطة $P(-\cos, -\sin)$ صورة النقطة $P(\cos, \sin)$

بالانعكاس في محور السينات

أي أن $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

، $\therefore \sin(-\theta) = -\sin\theta$ ، $\cos(-\theta) = \cos\theta$ لكل قيم θ الحقيقية

ملاحظة

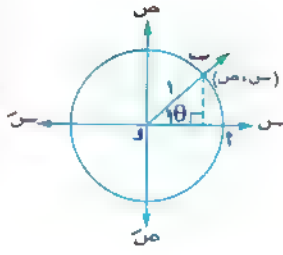
العلاقات المثلثية بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة التي درسناها سابقاً هي متطابقات لأنها تتحقق لجميع قيم المتغير الحقيقية.

مثل $\sin(\theta - \pi) = -\sin\theta$ ، $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ ،

المعادلة

هي متساوية صحيحة لبعض قيم المتغير الحقيقية التي تحققها وغير صحيحة للبعض الآخر الذي لا يحققها.

فمثلاً المتساوية : $\sin\theta = \sin\theta$ تسمى معادلة لأنها صحيحة لبعض وليس كل قيم المتغير θ الحقيقية.



وذلك لأن : في الشكل المقابل :

من دراستنا السابقة وجدنا أن : $\cos \theta = \cos$ ، $\sin \theta = \sin$

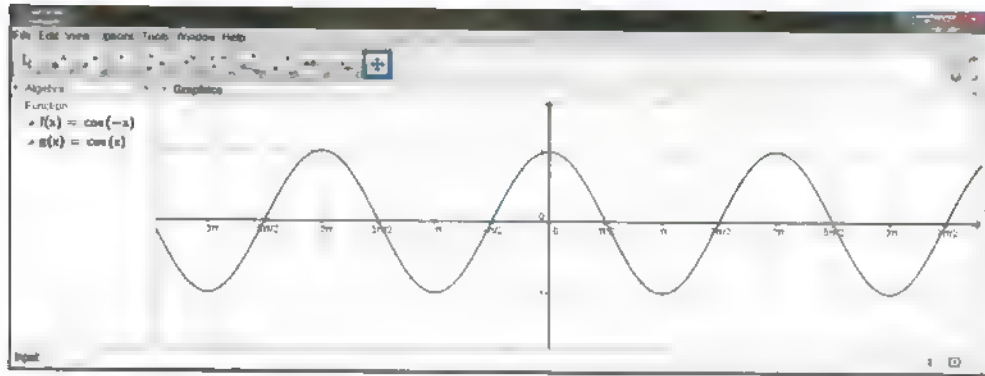
∴ $\cos \theta = \cos$ عندما $\sin = \sin$ فقط

وهذا لا يحدث إلا عندما $\theta = 0^\circ$ أو 360° أو أى من الزوايا المكافئة لهما.

ملاحظة

يمكن تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل متطابقة أو معادلة عن طريق التمثيل البياني للدالتين المحدتين لطرفيها ، فإذا كانت الدالتان متقاطعتين في كل النقط (منطقتين) كانت العلاقة تمثل متطابقة ، وإذا كانتا متقاطعتين في بعض النقط فقط كانت تمثل معادلة.

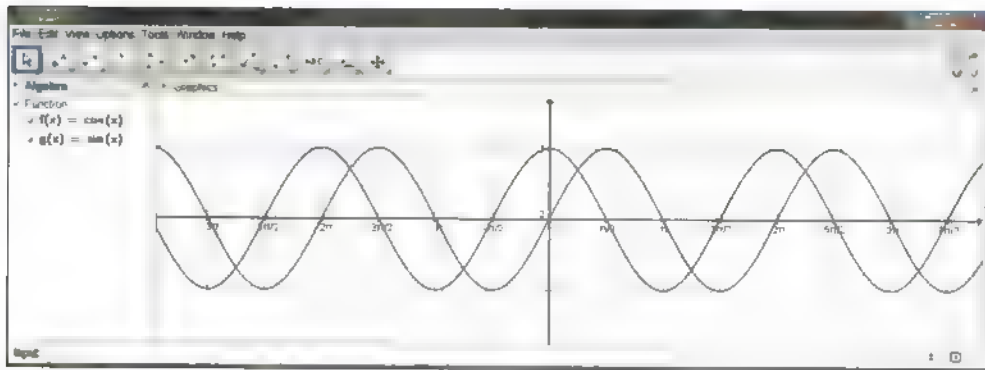
فمثلاً • في الشكل التالي :



الدالتان $f(x) = \cos(-x)$ ، $g(x) = \cos(x)$ ، $\cos \theta = \cos$ متقاطعتان في جميع النقط أى منطقتان.

ولذلك : المتساوية $\cos \theta = \cos$ تسمى متطابقة.

• في الشكل التالي :



الدالتان $f(x) = \cos(x)$ ، $g(x) = \sin(x)$ ، $\cos \theta = \sin$ متقاطعتان في بعض النقط

ولذلك : المتساوية $\cos \theta = \sin$ تسمى معادلة.

المتطابقات المثلثية الأساسية

* درسنا فيما سبق المتطابقات المثلثية الآتية :

١ متطابقة الدوال المثلثية ومقلوباتها :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) , & \cos \theta &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \tan \theta &= \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) , & \cot \theta &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \sec \theta &= \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) , & \csc \theta &= \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{aligned}$$

٢ التعبير عن $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ بدلالة $\tan \theta$ ، $\cot \theta$:

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} , \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

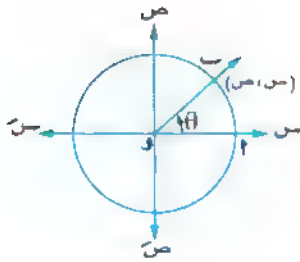
٣ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين $(\theta, (\frac{\pi}{2} - \theta))$:

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \cos \theta , & \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \sin \theta \\ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \cot \theta , & \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \tan \theta \\ \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \csc \theta , & \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) &= \sec \theta \end{aligned}$$

٤ متطابقة الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, -\theta)$:

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta , & \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta , & \cot(-\theta) &= -\cot \theta \\ \sec(-\theta) &= \sec \theta , & \csc(-\theta) &= -\csc \theta \end{aligned}$$

٥ متطابقة فيثاغورث :



لأى زاوية موجبة قياسها θ في الوضع القياسي إذا كان ضلعها النهائي

يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$ فإن :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 , \quad \therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta , \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\therefore \boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \quad (١) \text{ متطابقة فيثاغورث}$$

• بقسمة طرفي العلاقة (١) على $\sin^2 \theta$ نجد أن :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad \therefore \boxed{1 = 1 + \cot^2 \theta}$$

• بقسمة طرفي العلاقة (١) على $\sin \theta$ نجد أن :

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \therefore \tan \theta = 1 + \frac{1}{\sin \theta}$$

ملاحظات

- ١ من العلاقة : $\sin \theta + \cos \theta = 1$ نستنتج أن : $\sin \theta - 1 = -\cos \theta$ ، $\cos \theta - 1 = -\sin \theta$
- ٢ من العلاقة : $\sin \theta + \cos \theta = 1$ نستنتج أن : $\sin \theta = 1 - \cos \theta$ ، $\cos \theta = 1 - \sin \theta$
- ٣ من العلاقة : $\tan \theta = 1 + \frac{1}{\sin \theta}$ نستنتج أن : $\tan \theta - 1 = \frac{1}{\sin \theta}$ ، $\tan \theta - \frac{1}{\sin \theta} = 1$

تحقق من فهمك .

اختر الإجابة الصحيحة : $\sin \theta + \cos \theta \neq \dots\dots\dots$

- (١) $\tan \theta$ (ب) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ (ج) $\tan \theta - \cos \theta$ (د) $\tan \theta - \sin \theta$

تبسيط المقادير المثلثية

المقصود بتبسيط المقدار المثلثي هو استخدام المتطابقات المثلثية لوضع المقدار في أبسط صورة له.

مثال ١

اكتب كلاً من المقادير الآتية في أبسط صورة :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (١) \\ & (\sin \theta + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \quad (٢) \\ & \frac{(\theta - \frac{\pi}{2})^2 \tan^2 \theta + 1}{(\theta + \frac{\pi}{2})^2 \tan^2 \theta + 1} \quad (٣) \end{aligned}$$

الحل

لاحظ أن

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

تذكر أن

$$1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$(١) \quad 1 = \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(٢) \quad \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \cos \theta = \sin \theta (\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$(٣) \quad (\sin \theta + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{\theta^2 + 1}{\theta^2 + 1} = \frac{(\theta - \frac{\pi^2}{2})^2 + 1}{(\theta + \frac{\pi^2}{2})^2 + 1} \quad 4$$

$$\frac{\theta^2}{\theta^2} =$$

$$\theta^2 = \frac{\theta^2}{\theta^2} =$$

لاحظ ان

$$\theta^2 \times \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{\theta^2}{\theta^2}$$

$$\theta^2 = \frac{\theta^2}{\theta^2} =$$

حاول بنفسك

ضع في أبسط صورة كلاً من المقادير الآتية :

$$\frac{\theta^2 - 1}{1 - \theta^2} \quad 3$$

$$(\theta - \pi^2) \text{ كما } (\theta - \frac{\pi^2}{2}) \quad 2$$

$$\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} \quad 1$$

المتطابقات المثلثية

• لإثبات صحة المتطابقة المثلثية نتبع إحدى الطريقتين :

1 نبدأ بأحد طرفي المتطابقة ونستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لوضعه على نفس صورة الطرف الآخر.

2 نضع كلاً من طرفي المتطابقة المثلثية في أبسط صورة لإثبات أن الطرفين لهما نفس الناتج عند

وضعهما في أبسط صورة.

مثال 2

أثبت صحة المتطابقة : $\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 - \theta^2 - 1 - \theta^2$

الحل

الطرف الأيمن = $\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 - (\theta^2 - 1) - \theta^2$

= $\theta^2 - \theta^2 + 1 - \theta^2 = \theta^2 - \theta^2 - 1 - \theta^2$ = الطرف الأيسر.

لاحظ ان

$$\theta^2 - 1 = \theta^2$$

مثال 3

أثبت صحة المتطابقة : $\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 - 1 - \theta^2$

الحل

الطرف الأيمن = $\theta^2 - \theta^2$

= $(\theta^2 + \theta^2)(\theta^2 - \theta^2)$

= $(\theta^2 - \theta^2) \times 1$

= $\theta^2 - \theta^2 - 1 - \theta^2 = \theta^2 - \theta^2 - 1 - \theta^2$ = الطرف الأيسر.

لاحظ ان

$$\theta^2 - \theta^2 + 1 = \theta^2$$

$$\theta^2 - 1 - \theta^2 = \theta^2$$

مثال ۴

أثبت صحة المتطابقة : $\theta_{\text{مأ}} + 1 = \frac{\theta_{\text{مأ}}^2}{\theta_{\text{مأ}} - 1}$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\theta^2}{\theta - 1} = \frac{\theta^2 - 1}{\theta - 1} = \frac{(\theta + 1)(\theta - 1)}{\theta - 1} = \theta + 1 = \text{الطرف الأيسر.}$$

حاول بنفسك

أثبت صحة المتطابقتين الآتيتين :

$$y = y(\theta_L - \theta_R) + y(\theta_L + \theta_R)$$

$$\theta_{L-1} = \frac{\theta_{L-1}^2}{\theta_{L-1} + 1}$$

مثال ۵

أثبت صحة المتطابقة : $\theta \circ \theta = \theta \circ \theta + \theta \circ \theta$

الحل

لاحظ أنه

فقط وذلك باستخدام العلاقات الآتية :

$$\frac{\theta_{12}}{\theta_{11}} = \theta_{12} \quad , \quad \frac{\theta_{13}}{\theta_{11}} = \theta_{13}$$

$$\frac{1}{\theta_L} = \theta_L^* , \quad \frac{1}{\theta_H} = \theta_H^*$$

الطرف الأيمن = $\theta_{\text{طا}} + \theta_{\text{طا}}$

$$\frac{\theta L}{\theta L} + \frac{\theta L}{\theta L} =$$

$$\frac{\theta^{\vee L} + \theta^{\vee L}}{\theta^L \theta^L} =$$

$$\frac{1}{0101} =$$

θ فَا θ = الطرف الأيسر.

مثال ۶

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\theta^{\gamma_b-1}}{\theta^{\gamma_b+1}} = 1 - \theta^{\gamma_b}$

الحل

$$\theta^{\gamma_{\text{منا}}} - \theta^{\gamma_{\text{منا}}} = \theta^{\gamma_{\text{منا}}} \times \left(\frac{\theta^{\gamma_{\text{منا}}}}{\theta^{\gamma_{\text{منا}}}} - 1 \right) = \frac{\theta^{\gamma_{\text{منا}}} - 1}{\theta^{\gamma_{\text{منا}}}} = \frac{\theta^{\gamma_{\text{منا}}} - 1}{\theta^{\gamma_{\text{منا}}}} = \frac{\theta^{\gamma_{\text{منا}}} - 1}{\theta^{\gamma_{\text{منا}}} + 1} = \text{الطرف الايسر}$$

$$= \theta^{\gamma} + 1 - \theta^{\gamma} = 1 - \theta^{\gamma} = \text{الطرف الأيمن.}$$

مثال ٧

أثبت صحة المتطابقة : $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

الحل .

$$\text{الطرف الأيمن} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \times \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{(\cancel{\cos^2 \theta}^2)(\cos^2 \theta + 1)}{\cancel{\cos^2 \theta}^2} = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta} =$$

$$(1) \quad \cos^2 \theta + 1 =$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + 1 - 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$(2) \quad \cos^2 \theta + 1 =$$

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان.

حاول بنفسك

$$\text{أثبت صحة المتطابقة : } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta + 1}$$

مثال ٨

إذا كان : $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أوجد قيمة : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

الحل .

$$\therefore \cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



اختبر نفسك

مستويات عليا

على المتطابقات المثلثية

تمارين

8

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أي من العلاقات الآتية تمثل متطابقة ؟

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{2} = \theta$$

$$(ب) \theta = \theta$$

$$(ج) \theta = (\theta - \pi)$$

$$(د) \frac{1}{2} = (\theta - \pi)$$

(٢) أي من العلاقات الآتية تمثل معادلة ؟

$$(1) \theta = (\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$(ب) \theta = (\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$(ج) \theta = (\theta - \pi)$$

$$(د) \theta = (\theta - \pi)$$

$$(3) \theta = \theta$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ج) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(4) \frac{\theta}{\theta} = \theta \text{ في أبسط صورة يساوي } \dots\dots\dots$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ج) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(5) \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ج) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(6) \theta = \theta + \theta$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ج) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(7) \frac{2}{\theta} = \frac{2}{\theta}$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ب) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(8) \theta = (\theta - 270) + (\theta - 180)$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ب) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(9) \theta = \theta + \theta$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ب) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(10) \theta = \theta \times \theta$$

$$(1) \theta = \theta$$

$$(ب) \theta = \theta$$

$$(د) \theta = \theta$$

$$(ج) \theta = \theta$$

- (١١) $\theta \sin \theta \cos \theta$ في أبسط صورة يساوي
 (أ) $\theta \sin \theta$ (ب) $\theta \cos \theta$ (ج) $\theta \sin \theta \cos \theta$ (د) $\theta \sin \theta - 1$
- (١٢) $\frac{\theta \sin \theta - 1}{\theta \sin \theta - 1}$ في أبسط صورة يساوي
 (أ) $1 - \theta$ (ب) 1 (ج) $\theta \sin \theta$ (د) $\theta \cos \theta$
- (١٣) $\frac{\theta \sin \theta - \theta \cos \theta}{\theta \sin \theta + \theta \cos \theta}$ في أبسط صورة يساوي
 (أ) 1 (ب) $\theta \sin \theta$ (ج) $1 - \theta$ (د) $\theta \cos \theta$
- (١٤) $\frac{\beta \sin \theta - 1}{1 - \beta \sin \theta}$ في أبسط صورة يساوي
 (أ) $\beta \sin \theta - 1$ (ب) $\beta \cos \theta$ (ج) $\beta \sin \theta$ (د) $\beta \cos \theta$
- (١٥) $\frac{\theta \sin \theta + 1}{\theta \sin \theta + 1}$ في أبسط صورة يساوي
 (أ) $\theta \sin \theta$ (ب) $\theta \cos \theta$ (ج) 1 (د) $\theta \sin \theta$
- (١٦) $\theta \sin \theta + \theta \cos \theta + \theta \sin \theta = \dots$
 (أ) 1 (ب) $\theta \sin \theta$ (ج) $\theta \cos \theta$ (د) $\theta \sin \theta$
- (١٧) $(\theta \sin \theta - \theta \cos \theta) = \dots$
 (أ) 1 (ب) $1 - \theta$ (ج) θ (د) $\theta - 1$
- (١٨) $\frac{1}{\theta \sin \theta} + \theta \sin \theta + \theta \cos \theta = \dots$
 (أ) 2 (ب) 1 (ج) $\theta \sin \theta$ (د) $\theta \cos \theta$
- (١٩) $\theta \sin \theta \cos \theta + \theta \sin \theta \cos \theta + \theta \sin \theta \cos \theta = \dots$
 (أ) 1 (ب) 3 (ج) θ (د) 6
- (٢٠) $(\theta \sin \theta - 1)(\theta \sin \theta + 1)(\theta \sin \theta + 1) = \dots$
 (أ) $1 - \theta$ (ب) 1 (ج) $\theta \sin \theta$ (د) $\theta \cos \theta$
- (٢١) $\frac{\sin \theta \cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \dots$
 (أ) $\sin \theta$ (ب) $\cos \theta$ (ج) $\sin \theta$ (د) $\cos \theta$
- (٢٢) $\frac{\theta \sin \theta}{\theta \cos \theta} + \frac{\theta \cos \theta}{\theta \sin \theta} = \dots$
 (أ) $\theta \sin \theta$ (ب) $\theta \sin \theta + \theta \cos \theta$ (ج) $\theta \sin \theta \cos \theta$ (د) 1
- (٢٣) $\frac{\theta \sin \theta \cos \theta}{(\theta \sin \theta - 1)(\theta \sin \theta + 1)} = \dots$
 (أ) $\theta \sin \theta$ (ب) $\theta \cos \theta$ (ج) $\theta \sin \theta$ (د) $\theta \cos \theta$

$$(24) \quad \frac{6 \text{ حنا}^2 - \theta \text{ حنا}^2 - 1 + \theta}{\theta \text{ حنا}^2} \dots \dots \dots$$

| | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| (ا) حنا θ | (ب) حنا θ | (ج) حنا θ | (د) حنا θ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|

$$(25) \quad \frac{(\text{قاس} + \text{طاس}) (1 - \text{ماس})}{\text{حنا س}} = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|---------|-------|---------|---------|
| (ا) 1 - | (ب) 1 | (ج) طاس | (د) قاس |
|---------|-------|---------|---------|

$$(26) \quad \frac{\text{حنا}^2 \text{ س}}{1 + \text{ماس}} + \frac{\text{حنا}^2 \text{ س}}{1 + \text{ماس}} \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-------|-------------|-------------|-----------------|
| (ا) 2 | (ب) 2 حنا س | (ج) 2 حنا س | (د) ماس + حنا س |
|-------|-------------|-------------|-----------------|

$$(27) \quad \frac{\text{حنا س} + 1}{\text{قاس}} - \text{حنا}^2 \text{ س} = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-----------|---------|------------------------|------------------------|
| (ا) حنا س | (ب) ماس | (ج) حنا ² س | (د) حنا ² س |
|-----------|---------|------------------------|------------------------|

$$(28) \quad \dots \dots \dots = \frac{1 - \text{طاس}}{1 - \text{طاس}}$$

| | | | |
|-----------|---------|-----------|---------|
| (ا) - طاس | (ب) طاس | (ج) - طاس | (د) طاس |
|-----------|---------|-----------|---------|

$$(29) \quad \dots \dots \dots = {}^2(\text{قنا} - \theta \text{ حنا}) + {}^2(\text{قنا} - \theta \text{ حنا}) - {}^2(\text{قنا} - \theta \text{ حنا})$$

| | | | |
|---------|-------|-------|-------|
| (ا) صفر | (ب) 1 | (ج) 2 | (د) 2 |
|---------|-------|-------|-------|

$$(30) \quad \text{إذا كان : } \theta^2 = 10 \quad \text{فإن : } \theta^2 = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|---------|---------|--------|--------|
| (ا) 220 | (ب) 226 | (ج) 10 | (د) 16 |
|---------|---------|--------|--------|

$$(31) \quad \text{إذا كان : } \theta = \frac{1}{3} \quad \text{فإن : } \theta^2 = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| (ا) $\frac{1}{9}$ | (ب) $\frac{4}{9}$ | (ج) $\frac{1}{9}$ | (د) $\frac{2}{4}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|

$$(32) \quad \text{إذا كانت : } \theta \text{ حنا} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{3} \quad \text{فإن : } \theta^2 = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-------------|-----------------------|---------------------------------------|-------------|
| (ا) $2 \pm$ | (ب) $\frac{2}{3} \pm$ | (ج) $\frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{3} \pm$ | (د) $1 \pm$ |
|-------------|-----------------------|---------------------------------------|-------------|

$$(33) \quad \text{إذا كان : } \theta + \theta^2 = 0 \quad \text{فإن : } \theta^2 + \theta^2 = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| (ا) 1 | (ب) 0 | (ج) 22 | (د) 20 |
|-------|-------|--------|--------|

$$(34) \quad \text{إذا كان : } \theta - \theta^2 = \frac{4}{5} \text{ حيث } \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad \text{فإن : } \theta \text{ حنا} = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| (ا) $\frac{1}{5}$ | (ب) $\frac{9}{50}$ | (ج) $\frac{41}{50}$ | (د) $\frac{9}{50}$ |
|-------------------|--------------------|---------------------|--------------------|

$$(35) \quad \text{إذا كان : } \theta^2 - \theta = \frac{1}{3} \quad \text{فإن : } \theta^2 + \theta = \dots \dots \dots$$

| | | | |
|-------|-------------------|-------------------|-------|
| (ا) 2 | (ب) $\frac{1}{3}$ | (ج) $\frac{2}{3}$ | (د) 1 |
|-------|-------------------|-------------------|-------|

$$(37) \quad \frac{\theta^4 - \theta^2}{\theta^4 - \theta^2} = \dots$$

$$(1) \quad \theta^4 \text{ فـا} \quad (ب) \quad \theta^4 - \theta^2$$

$$(ج) \quad \theta^4 - \theta^2 \text{ فـا} \quad (د) \quad \theta^4 - \theta^2$$

$$(38) \quad \text{إذا كان: } \theta^4 = \theta^2 \times \theta^2 = 4 \text{ فإن: } \dots$$

$$(1) \quad 4 \quad (ب) \quad 5 \quad (ج) \quad 6 \quad (د) \quad 7$$

$$(39) \quad \frac{\theta^2 + \theta^2}{\theta^2 - 1} = \dots$$

$$(1) \quad \theta^2 - \theta^2 \quad (ب) \quad \theta^2 + \theta^2 \quad (ج) \quad 2\theta^2 \quad (د) \quad 2\theta^2$$

$$(40) \quad \frac{1 - \theta^2}{\theta^2 - 1} + \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} = \dots$$

$$(1) \quad 2 \text{ فـا} \quad (ب) \quad 2 \text{ فـا} \quad (ج) \quad 2 \text{ فـا} \quad (د) \quad 2 \text{ فـا}$$

$$(41) \quad \dots = (1 + \theta^2) + (1 + \theta^2) + (1 + \theta^2) + (1 + \theta^2) = \dots$$

$$(1) \quad 4 \quad (ب) \quad 5 \quad (ج) \quad 7 \quad (د) \quad 9$$

$$(42) \quad \text{إذا كان: } 3\theta^2 + 2\theta^2 = 26 \text{ فإن: } 42 - 7 = \dots = 1 + 2 = \dots$$

$$(1) \quad 1 \quad (ب) \quad 2 \quad (ج) \quad 5 \quad (د) \quad 3\theta^2$$

$$(43) \quad \dots = (\theta^2 - \theta^2) - (\theta^2 + \theta^2) = \dots$$

$$(1) \quad \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} \quad (ب) \quad \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$$

$$(ج) \quad 4 - \theta^2 \quad (د) \quad 16 - \theta^2$$

$$(44) \quad \text{إذا كانت } \theta \text{ قياس زاوية حادة فإن: } \sqrt{\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1}} = \dots$$

$$(1) \quad \theta^2 \quad (ب) \quad 2 - \theta^2 \quad (ج) \quad \theta^2 \quad (د) \quad \theta^2$$

$$(45) \quad \text{إذا كان: } \theta^2 + \theta^2 = \theta^2 \text{ فإن: } \theta^2 - \theta^2 = \dots$$

$$(1) \quad \theta^2 \quad (ب) \quad 2 + \theta^2 \quad (ج) \quad \theta^2 - 2 \quad (د) \quad 2\theta^2$$

$$(46) \quad \text{إذا كان: } \frac{\theta^2 - \theta^2}{\theta^2 - \theta^2} = \dots \text{ فإن: } \dots = \dots$$

$$(1) \quad 1 \quad (ب) \quad 2 \quad (ج) \quad 3 \quad (د) \quad 4$$

$$(47) \quad \text{إذا كان } 4 \text{ حـو رباعياً دائرياً فإن: } 4 \text{ حـو} + 4 \text{ حـو} + 4 \text{ حـو} = \dots$$

$$(1) \quad 360^\circ \quad (ب) \quad 180^\circ \quad (ج) \quad 90^\circ \quad (د) \quad 4 \text{ حـو}$$

(٤٧) إذا كانت : $2\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ فإن : \exists

- (أ) $[0, 2]$ (ب) $[0, 1]$ (ج) $[0, \infty)$ (د) $[0, \infty)$

(٤٨) إذا كان : $2\sin\theta + \sin\theta = 1$ ، $2\cos\theta - \cos\theta = 1$ فإن : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \dots$

- (أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧

(٤٩) إذا كان θ ، α قياسي زاويتين حادتين وكان $\alpha + \theta = 90^\circ$ فإن : $\sin^2\alpha + \sin^2\theta = \dots$

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) $2\sin^2\theta$ (د) $2\sin^2\theta$

(٥٠) في ΔABC إذا كان : $\sin A = 1$ فإن : ΔABC يكون

- (أ) متساوي الأضلاع. (ب) متساوي الساقين. (ج) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

(٥١) إذا كان : $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن : $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \dots$

- (أ) $\frac{1}{10}$ (ب) ١ (ج) $\frac{7}{10}$ (د) ١٠

(٥٢) $\frac{1 - \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta} = \dots$

- (أ) $1 - \sin\theta$ (ب) $\sin\theta$ (ج) $1 - \cos\theta$ (د) $\cos\theta$

الأسئلة المثالية

ثانياً

١ اكتب في أبسط صورة كلاً من المقادير الآتية «حيث θ قياس زاوية معرف عندها جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها» :

- (١) $\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$ (٢) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
 (٣) $\sin(\theta - \pi) \cos(\theta - \pi)$ (٤) $\frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin(\theta - \pi)}$
 (٥) $\frac{2}{\sin^2\theta} - (\sin\theta + \cos\theta)$ (٦) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta)$
 (٧) $\sin^2\theta \cos\theta$ (٨) $\sin^2\theta - \cos\theta$
 (٩) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta - \pi)$ (١٠) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \sin(\theta - \pi)$
 (١١) $\sin\theta \cos\theta \sin(\theta + \theta)$ (١٢) $\frac{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1}$
 (١٣) $\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sin\theta}$

٢ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

$$(١) \quad \theta \zeta \alpha = \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha$$

$$(٢) \quad \theta \zeta \alpha + ١ = \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha$$

$$(٣) \quad \mu \zeta \alpha - ١ = \mu \zeta \alpha (\mu - ١)$$

$$(٤) \quad \beta \zeta \alpha \beta \zeta \alpha = \beta \zeta \alpha + \beta \zeta \alpha$$

$$(٥) \quad \zeta - = (\theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha) - \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha$$

$$(٦) \quad \zeta = \zeta (\theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha) + \zeta (\theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha)$$

$$(٧) \quad \theta \zeta \alpha = (\theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha) (\theta \zeta \alpha - ١)$$

$$(٨) \quad \theta \zeta \alpha = \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha$$

$$(٩) \quad ١ = \alpha \zeta \alpha + \beta \zeta \alpha \alpha \zeta \alpha + \beta \zeta \alpha \alpha \zeta \alpha$$

$$(١٠) \quad \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha = \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha$$

$$(١١) \quad \alpha \zeta \alpha = \alpha \zeta \alpha \alpha \zeta \alpha + \alpha \zeta \alpha$$

$$(١٢) \quad \mu \zeta \alpha \mu \zeta \alpha = \mu \zeta \alpha - \mu \zeta \alpha$$

$$(١٣) \quad \theta \zeta \alpha = \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha$$

$$(١٤) \quad ١ = \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha$$

$$(١٥) \quad ١ = \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha$$

$$(١٦) \quad \theta \zeta \alpha - ١ = \theta \zeta \alpha (\theta - ١)$$

$$(١٧) \quad \theta \zeta \alpha = \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha$$

٣ أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

$$(١) \quad \theta \zeta \alpha - ١ = \frac{\theta \zeta \alpha \times \theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha}$$

$$(٢) \quad \theta \zeta \alpha = \theta \zeta \alpha + \frac{\theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha + ١}$$

$$(٣) \quad ١ - \theta \zeta \alpha = \frac{\theta \zeta \alpha - ١}{\theta \zeta \alpha - ١}$$

$$(٤) \quad \theta \zeta \alpha = (\theta \zeta \alpha - ١) \frac{\theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha}$$

$$(٥) \quad \theta \zeta \alpha - ١ = \frac{\theta \zeta \alpha + ١}{\theta \zeta \alpha}$$

$$(٦) \quad \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha = \frac{\theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha}$$

$$(٧) \quad \frac{\theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha + ١} = \frac{١}{\theta \zeta \alpha + ١}$$

$$(٨) \quad \theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha = \frac{\theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha}$$

$$(٩) \quad \zeta + \theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha = \zeta (\theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha) + \zeta (\theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha)$$

$$(١٠) \quad \theta \zeta \alpha \zeta = \frac{\zeta (\theta \zeta \alpha + \theta \zeta \alpha) - ١}{\theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha}$$

$$(١١) \quad \theta \zeta \alpha \times \theta \zeta \alpha = \frac{\theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha + ١}$$

$$(١٢) \quad \theta \zeta \alpha + ١ = \frac{\theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha - ١}$$

$$(١٣) \quad ١ - \theta \zeta \alpha \zeta = \frac{\theta \zeta \alpha - ١}{\theta \zeta \alpha + ١}$$

$$(١٤) \quad ١ = \theta \zeta \alpha - \frac{١}{(\theta - ١) \zeta \alpha}$$

$$(١٥) \quad \beta \zeta \alpha - \alpha \zeta \alpha = \frac{١}{\beta \zeta \alpha + ١} - \frac{١}{\alpha \zeta \alpha + ١}$$

$$(١٦) \quad \frac{\theta \zeta \alpha - ١}{\theta \zeta \alpha + ١} = \zeta (\theta \zeta \alpha - \theta \zeta \alpha)$$

$$(١٧) \quad \zeta = \frac{\alpha \zeta \alpha - \alpha \zeta \alpha}{\alpha \zeta \alpha - \alpha \zeta \alpha} + \frac{\alpha \zeta \alpha + \alpha \zeta \alpha}{\alpha \zeta \alpha + \alpha \zeta \alpha}$$

$$(١٨) \quad ١ = \frac{(\theta + ١) \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha \theta \zeta \alpha} + \frac{(\theta - ١) \zeta \alpha \theta \zeta \alpha}{\theta \zeta \alpha}$$

$$= \frac{2}{10}$$

٤ إذا كان : $\frac{2}{y} = \frac{\theta^2 - \theta^2}{\theta^2 + \theta^2}$ فأوجد قيمة : θ

$$= \frac{8}{8}$$

٥ إذا كانت : $\theta^2 + \theta^2 = \frac{2}{y}$ فأوجد قيمة : θ حيث : $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\frac{10}{8}, \frac{11}{8}$$

٦ إذا كان : $\theta^2 - \theta^2 = \frac{1}{4}$ فأوجد قيمة كل من : θ ، θ

٧ إذا كان : $\frac{9}{32} = \frac{\theta^2 - \theta^2}{\theta^2 - \theta^2}$ فأثبت أن : $\theta^2 = \theta^2$

٨ إذا كان : $\theta^2 + \theta^2 = 0$ أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي :

$$= 110$$

$$\theta^2 + \theta^2$$

$$= 23$$

$$\theta^2 + \theta^2$$

$$= \pm 2\sqrt{2}$$

$$\theta^2 - \theta^2$$

$$= \pm 2\sqrt{2}$$

$$\theta^2 - \theta^2$$

مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\theta^2 + \theta^2 = 30$ فإن : $\theta^2 + \theta^2$ (٢ ص) $\theta^2 + \theta^2$ (٣ ص) =

$$\sqrt{2}$$

$$= 1$$

$$= 0$$

$$= 1$$

(٢) إذا كانت : $\theta^2 = \frac{1}{\theta^2}$ ، $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ فإن : $\theta^2 + \theta^2 = \dots\dots\dots$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

(٣) إذا كان : $\pi > \theta > \frac{\pi}{4}$ فإن : $\theta^2 + \theta^2 = \dots\dots\dots$

$$\theta^2 - \theta^2$$

$$\theta^2 - \theta^2$$

$$\theta^2 - \theta^2$$

$$\theta^2 - \theta^2$$

(٤) إذا كان : θ^2 ، θ^2 هما جذرا المعادلة : $\theta^2 + \theta^2 - 1 = 0$ فإن : $\theta^2 = \dots\dots\dots$

$$= 4$$

$$= 2$$

$$= 2$$

$$= 0$$

(٥) إذا كان : $\theta^2 + \theta^2 = 0$ فإن : $\theta^2 - \theta^2 = \dots\dots\dots$

$$= 0$$

$$= 2$$

$$= 4$$

$$= 0$$

(٦) إذا كانت : $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ وكانت : $\theta^2 + \theta^2 = 8$ فإن : $\theta^2 + \theta^2 = \dots\dots\dots$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

• (٧) إذا كانت $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ ، فإن $\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \dots$

(١) $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ (ب) $\cos \theta + \sin \theta$ (ج) $\cos \theta - \sin \theta$ (د) $\cos \theta + \sin \theta$

• (٨) إذا كان $1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ ، فإن $\dots = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

(١) $1 - \cos \theta$ (ب) 1 (ج) $\cos^2 \theta$ (د) 2

• (٩) إذا كان $\cos \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \dots + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

فإن $\dots = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \dots + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

(١) $1 - \cos \theta$ (ب) $\cos \theta$ (ج) $\cos \theta - 1$ (د) $1 - \cos \theta$

• (١٠) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \dots + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \dots$

(١) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{6}$

• (١١) $\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \dots + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \dots + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \dots$

(١) 90 (ب) 88 (ج) 88 (د) 90

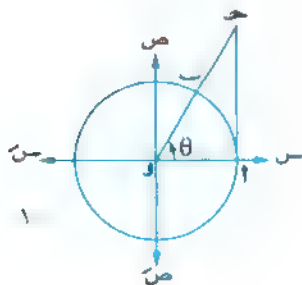
٢ أثبت أن: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

٣ في الشكل المقابل:

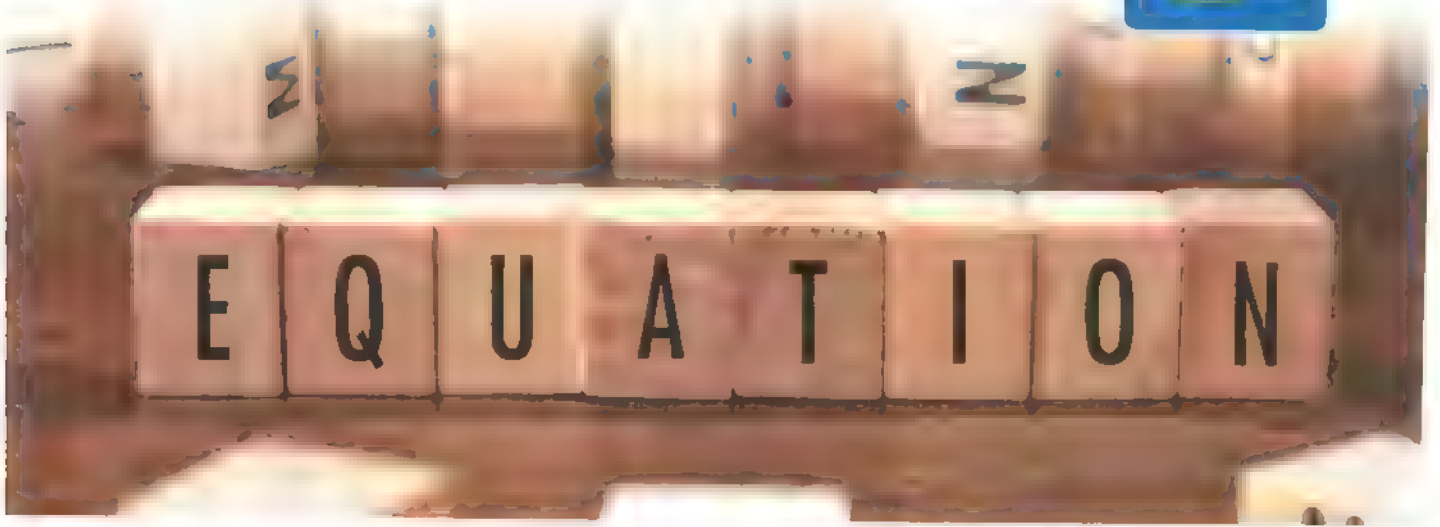
دائرة وحدة مركزها و

إذا كان: $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، مماسًا للدائرة عند

أوجد قيمة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$



حل المعادلات المثلثية



المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيم المتغير التي تحقق هذه المعادلة وذلك بالاستعانة بالمتطابقات المثلثية.

الحل العام للمعادلة المثلثية

لإيجاد الحل العام للمعادلة المثلثية على الصورة :

ما $\theta = \theta$ أو ما $\theta = \theta$ أو ما $\theta = \theta$ نتبع الخطوات الآتية :

١) نوجد قياس الزاوية الحادة ولتكن β التي تحقق

المعادلة : ما $\theta = \theta$ أو ما $\theta = \theta$ أو ما $\theta = \theta$

٢) نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية حسب إشارة θ

(انظر الشكل المقابل)

٣) نوجد قيم الزاوية θ حيث إن :

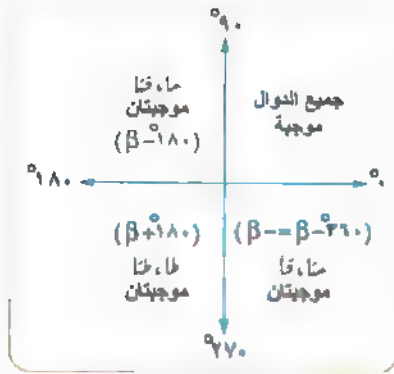
• إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن : $\beta = \theta$

• إذا كانت θ تقع في الربع الثاني فإن : $\beta - 180^\circ = \theta$

• إذا كانت θ تقع في الربع الثالث فإن : $\beta + 180^\circ = \theta$

• إذا كانت θ تقع في الربع الرابع فإن : $\beta - 360^\circ = \theta$

٤) نضيف عددًا من الدورات (2π أو π) حيث $\exists n \in \mathbb{Z}$ إلى قيم θ لنحصل على الحل العام للمعادلة المثلثية.



ملادظة

* $1 - \theta \geq 1$ ، $1 - \theta \geq 1$ لجميع قيم θ الحقيقية

وبالتالي نجد أن المعادلتين : $\theta = 1$ ، $\theta = 1$ ليس لهما حل في مجموعة الأعداد الحقيقية إذا كانت : $\theta \notin [1, 1]$

فمثلا كل من المعادلات : $\theta = 1.2$ ، $\theta = 2.5$ ، $\theta = -1.4$

، $\theta = 0.5$ ، $\theta = -0.7$ ليس لها حلول حقيقية.

أي أنه ليس بالضرورة أن تكون لكل المعادلات المثبتة حلول حقيقية.

مثال 1

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

$$1) \theta = \frac{1}{4} \quad 2) \theta = 2\sqrt{2} - \theta \quad 3) \theta = 1 - \theta$$

الحل

1) $\theta = \frac{1}{4}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول. $\therefore \theta = 60^\circ$

أو θ تقع في الربع الرابع. $\therefore \theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ وهي تكافئ -60°

وبإضافة $(2\pi \text{ ر } \pi)$ حيث $\exists \text{ ر } \in \mathbb{Z}$ إلى قيم θ

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi \text{ ر } \pi \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ ر } \pi$$

\therefore الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ ر } \pi$ حيث $\exists \text{ ر } \in \mathbb{Z}$

2) $\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول. $\therefore \theta = 45^\circ$

أو θ تقع في الربع الثاني. $\therefore \theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

وبإضافة $(2\pi \text{ ر } \pi)$ حيث $\exists \text{ ر } \in \mathbb{Z}$ إلى قيم θ

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi \text{ ر } \pi \text{ أو } \theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \text{ ر } \pi$$

\therefore الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ ر } \pi$ أو $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi \text{ ر } \pi$ حيث $\exists \text{ ر } \in \mathbb{Z}$

3) $\theta = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ (موجبة) $\therefore \theta$ تقع في الربع الأول. $\therefore \theta = 30^\circ$

أو θ تقع في الربع الثالث. $\therefore \theta = 210^\circ = 30^\circ + 180^\circ$

وبإضافة $(\pi, 2)$ حيث $\exists \nu$ إلى قيم θ

$$\pi \nu 2 + \pi \frac{\nu}{4} = \theta \quad \text{أو} \quad \pi \nu 2 + \frac{\pi}{4} = \theta \quad \therefore$$

$$\therefore \text{الحل العام للمعادلة هو: } \pi \nu 2 + \frac{\pi}{4} = \theta \quad \text{أو} \quad \pi \nu 2 + \pi \frac{\nu}{4} = \theta \quad \text{حيث } \exists \nu$$

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة بصورة أكثر تبسيطا كالآتي :

$$\text{الحل العام للمعادلة هو: } \pi \nu + \frac{\pi}{4} = \theta \quad \text{حيث } \exists \nu$$

وذلك بإضافة π إلى أصغر قياس موجب.

ملاحظة

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كانت β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، $\exists \nu$ فإن :

$$\text{١} \quad \text{الحل العام للمعادلة ما } \theta = 1 \text{ هو: } \pi \nu 2 + \beta = \theta \quad , \quad \pi \nu 2 + (\beta - \pi) = \theta$$

$$\text{ويمكن أن يكتب: } \pi \nu + \beta \times (-1) = \theta$$

$$\text{٢} \quad \text{الحل العام للمعادلة ما } \theta = 1 \text{ هو: } \pi \nu 2 + \beta \pm = \theta$$

$$\text{٣} \quad \text{الحل العام للمعادلة ما } \theta = 1 \text{ هو: } \pi \nu + \beta = \theta$$

مثال ٢

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

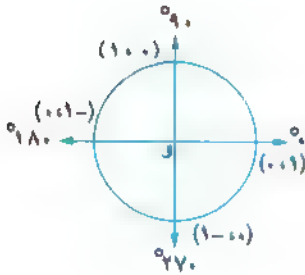
$$\text{١} \quad \text{ما } \theta = 1$$

$$\text{٢} \quad \text{ما } \theta = 1$$

$$\text{٣} \quad \text{ما } \theta = 0$$

$$\text{٤} \quad \text{ما } \theta = 1$$

الحل



$$\therefore \theta = 0^\circ \quad \text{أو} \quad \theta = 180^\circ$$

$$\text{١} \quad \text{ما } \theta = 0$$

وبإضافة $(\pi, 2)$ حيث $\exists \nu$ إلى قيم θ

\therefore الحل العام للمعادلة هو :

$$\pi \nu 2 = \theta \quad \text{أو} \quad \pi \nu 2 + \pi = \theta \quad \text{حيث } \exists \nu$$

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة في صورة أكثر تبسيطا كالآتي :

$$\text{الحل العام للمعادلة هو: } \pi \nu = \theta \quad \text{حيث } \exists \nu$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \quad \text{أو} \quad \theta = 270^\circ$$

$$\text{٢} \quad \text{ما } \theta = 0$$

وبإضافة $(\pi, 2)$ حيث $\exists \nu$ إلى قيم θ

$$\therefore \text{الحل العام هو: } \pi \nu 2 + \frac{\pi}{4} = \theta \quad \text{أو} \quad \pi \nu 2 + \pi \frac{\nu}{4} = \theta \quad \text{حيث } \exists \nu$$

ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة في صورة أكثر تبسيطا كالآتي :

الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$ حيث $\exists n$

٢ ما $\theta = 1$ $\therefore \theta = 90^\circ$

\therefore الحل العام هو : $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ حيث $\exists n$

٤ ما $\theta = 1$ $\therefore \theta = 180^\circ$

\therefore الحل العام هو : $\theta = 2\pi + \pi$ حيث $\exists n$

ملاحظة

كما سبق يمكن استنتاج الحل العام للمعادلات المثلثية للروايات الربعية :

| الحل العام | المعادلة |
|---------------------------------|-------------------|
| $n\pi = \theta$ | • ما $\theta = 0$ |
| $n\pi + \frac{\pi}{4} = \theta$ | • ما $\theta = 1$ |
| $n\pi + \frac{\pi}{2} = \theta$ | • ما $\theta = 1$ |
| $n\pi + \frac{\pi}{4} = \theta$ | • ما $\theta = 0$ |
| $n\pi = \theta$ | • ما $\theta = 1$ |
| $n\pi + \pi = \theta$ | • ما $\theta = 1$ |

حاول بنفسك

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

٢ ما $\theta = 1$

٢ ما $\theta = 1$

١ ما $\theta = 1$

مثال ٣

أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

٢ ما $\theta = 1$

١ ما $\theta = 1$

الحل

$\therefore \theta = 1$ (سالبة)

$\therefore \theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\therefore \theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

١ ما $\theta = 1$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني.

أو θ تقع في الربع الرابع.

لاحظ ان

قياس الزاوية العادة التي تحقق أن

$\theta = |1|$ هو 45°

∴ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة وهو 135°

∴ الحل العام هو : $\theta = \pi n + \frac{\pi}{2}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{٢} \quad \sin \theta = (1 - \theta) \cdot$$

∴ $\theta = 90^\circ$ أو $\theta = 270^\circ$ وهي تكافئ 90°

∴ إما $\sin \theta = 0$

$$\theta = \pi n + \frac{\pi}{4} \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أ، } \sin \theta = 1 \quad \therefore \theta = 0 \quad \therefore \theta = 2\pi n \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}$$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\theta = \pi n + \frac{\pi}{4}$ أو $\theta = 2\pi n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

مثال ٤

أوجد الحل العام للمعادلة : $\sin \theta = \frac{1}{4}$

الحل

$$\therefore \sin \theta = \left(\frac{1}{4} - \sin \theta\right) \cdot$$

$$\therefore \theta = 0^\circ \text{ أو } \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{4} - \sin \theta \cdot$$

$$\therefore \sin \theta = 0$$

$$\therefore \theta = \pi n \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{4} \text{ (موجبة)}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{أو } \sin \theta = \frac{1}{4} - \sin \theta \cdot$$

∴ θ تقع في الربع الأول.

أو θ تقع في الربع الرابع.

$$\therefore \theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \text{ وهي تكافئ } 60^\circ$$

$$\therefore \theta = \pm \pi n + \frac{\pi}{4} \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}$$

∴ الحل العام هو : $\theta = \pi n$ أو $\theta = \pm \pi n + \frac{\pi}{4}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : $\sin \theta = \frac{1}{2}$

حل المعادلة المتطابقة في الفترة $[0, 2\pi]$

مثال ٥

إذا كانت : $\theta \in [0, 2\pi]$ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

$$\text{٢} \quad \sin \theta = 2 - \theta$$

$$\text{١} \quad \sin \theta = 1 + \theta$$

الحل

$$1 \quad \therefore 2 = 1 + \theta \quad \therefore \frac{1}{2} = \theta \text{ (سالبة)}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو الثالث.

، \therefore الزاوية الحادة التي جيب تمامها $= \frac{1}{2}$ قياسها 60°

$$\therefore \theta = 60^\circ - 180^\circ = -120^\circ \text{ ، } \theta = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ \quad \therefore \text{ح.م.} = \{-120^\circ, 240^\circ\}$$

$$2 \quad \therefore \sqrt{2} = 2 - \theta \quad \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \theta \text{ (سالبة)}$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الرابع.

$$\therefore \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (موجبة)}$$

، \therefore الزاوية الحادة التي جيب تمامها $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ قياسها 45°

$$\therefore \theta = 45^\circ \text{ ، } \theta = 45^\circ - 360^\circ = -315^\circ \quad \therefore \text{ح.م.} = \{45^\circ, -315^\circ\}$$

مثال 6

أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $4 = 3 - \theta$ حيث $\theta \in [0, 360^\circ]$

الحل

$$1 \quad \therefore 4 = 3 - \theta \quad \therefore \theta = 3 - 4 = -1$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4} \text{ (سالبة)}$$

\therefore إما $\theta = \frac{3}{4}$ (موجبة)

، \therefore الزاوية الحادة التي جيب تمامها $= \frac{3}{4}$ قياسها 30°

$$\therefore \theta = 30^\circ \text{ ، } \theta = 30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$$

$\therefore \theta = \frac{3}{4}$ (سالبة)

$$\therefore \theta = 30^\circ - 180^\circ = -150^\circ \text{ ، } \theta = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{30^\circ, 210^\circ, -150^\circ, -330^\circ\}$$

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين حيث $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$1 \quad \sqrt{2} = 2 - \theta \quad 2 \quad \sqrt{2} = \theta$$

مثال ٧

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2 \sin \theta + \sin 2\theta = 0$ حيث $\theta \in [0, \pi]$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore 2 \sin \theta + \sin 2\theta &= 0 & \therefore \sin \theta (2 + \sin 2\theta) &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= 0 & \therefore \sin 2\theta &= -2 \\ \therefore \theta &= 0, \pi & \text{ (وهذه المعادلة ليس لها حل لأن } -1 \leq \sin 2\theta \leq 1) & \\ \therefore \text{ح.م.} &= \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} & & \end{aligned}$$

مثال ٨

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 2 = 0$ حيث $\theta \in [0, 360^\circ]$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore 4 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 2 &= 0 & \therefore \sin \theta (4 \sin \theta - 3) &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= 0 \text{ ومنها } \theta = 0^\circ, 180^\circ & \text{ أي } 4 \sin \theta - 3 &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= 0 & \text{ أي } \sin \theta &= \frac{3}{4} \text{ (موجبة)} \\ \therefore \theta &= 0^\circ, 180^\circ & \text{ أي } \theta &= \arcsin \left(\frac{3}{4} \right) \approx 48.59^\circ, 131.41^\circ \\ \therefore \text{ح.م.} &= \{0^\circ, 48.59^\circ, 131.41^\circ, 180^\circ\} & & \end{aligned}$$

حاول بنفسك

إذا كانت : $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أوجد مجموعة حل المعادلة : $2 \sin \theta + \sin 2\theta = 0$

مثال ٩

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ حيث $\theta \in [0, 360^\circ]$

الحل

بالتعويض عن $\cos \theta = 1 - \cos^2 \theta$ «لتوحيد النسب المثلثية في المعادلة»

$$\begin{aligned} \therefore 2 - 2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 &= 0 \\ \therefore 1 - \cos \theta - (\cos^2 \theta - \cos \theta) &= 0 \\ \therefore 1 - \cos \theta - \cos^2 \theta + \cos \theta &= 0 \\ \therefore 1 - \cos^2 \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = 1 \text{ أو } \cos \theta = -1$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الرابع.

، \therefore الزاوية الحادة التي جيب تمامها $\frac{1}{2}$ قياسها 60°

$$\therefore \text{ح.م} = \{60^\circ, 180^\circ, 300^\circ\}$$

استخدام التكنولوجيا

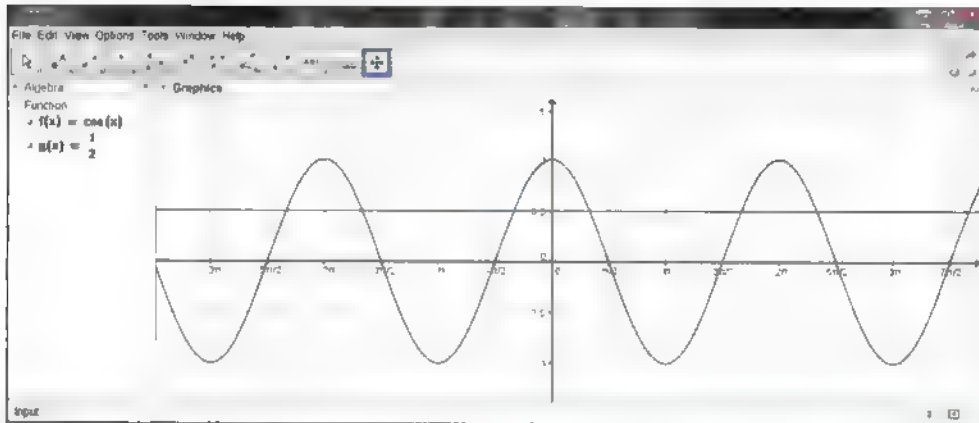
في مثال (١) وجدنا أن :

الحل العام للمعادلة : $\cos \theta = \frac{1}{2}$ هو $\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

ويمكن التأكد من صحة الحل برسم الدالتين $y = \cos(\theta)$ و $y = \frac{1}{2}$:

باستخدام أحد البرامج الرسومية وتحديد قيم θ المناظرة لنقط تقاطع الدالتين ومقارنتها

بقيم θ في الحل العام عند وضع $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$



ونلاحظ من الرسم أن الدالتين تتقاطعان في النقط :

$$\dots, \left(\frac{1}{2}, \pi\frac{5}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \pi\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \pi\frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \pi\frac{2}{3}\right), \dots$$

$$\text{أي أن } \theta = \dots, \pi\frac{5}{3}, \pi\frac{1}{3}, \pi\frac{7}{3}, \pi\frac{2}{3}, \dots$$

وهي نفس القيم التي تحصل عليها من الحل العام

عند التعويض عن $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$



اختر نفسك

مستويات عليا

على حل المعادلات المثلثية

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر

تمارين

9

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ وكانت : $\sin \theta = 1$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) 0° (ب) 90° (ج) 180° (د) 270°
- (٢) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ وكانت : $\sin \theta = 1$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) 90° (ب) 180° (ج) 270° (د) 360°
- (٣) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ وكانت : $\cos \theta = 1$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) 0° (ب) 90° (ج) 180° (د) 270°
- (٤) إذا كان : $2 = \sqrt{2} - \theta$ وكانت : $0^\circ < \theta < 360^\circ$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) 30° ، 150° (ب) 60° ، 120° (ج) 150° ، 210° (د) 120° ، 240°
- (٥) إذا كانت : $180^\circ \leq \theta < 360^\circ$ وكانت : $2 = \sin \theta + 1$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) 210° (ب) 240° (ج) 300° (د) 330°
- (٦) إذا كان : $2 = \sqrt{2} + \theta$ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، $\theta \in]\pi/2, \pi[$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{3\pi}{4}$ (ج) $\frac{5\pi}{4}$ (د) $\frac{7\pi}{4}$
- (٧) مجموعة حل المعادلة : $2 = \sqrt{2} - \theta$ حيث $\theta \in]\pi/2, \pi[$ هي
- (١) $\{\pi/4\}$ (ب) $\{\pi/2\}$ (ج) $\{3\pi/4\}$ (د) $\{5\pi/4\}$
- (٨) مجموعة حل المعادلة : $1 = \sqrt{2} \cos \theta$ حيث $90^\circ < \theta < 270^\circ$ هي
- (١) $\{30^\circ\}$ (ب) $\{150^\circ\}$ (ج) $\{210^\circ\}$ (د) $\{240^\circ\}$
- (٩) مجموعة حل المعادلة : $\sin \theta + \cos \theta = 0$ حيث $180^\circ < \theta < 360^\circ$ تساوي
- (١) $\{210^\circ\}$ (ب) $\{225^\circ\}$ (ج) $\{240^\circ\}$ (د) $\{315^\circ\}$
- (١٠) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ ، $\tan \theta = 1$ فإن : $\theta = \dots$
- (١) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 135°
- (١١) إذا كانت : $\theta \in]\pi/2, \pi[$ ، $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فإن مجموعة الحل هي
- (١) \emptyset (ب) $\{\frac{\pi}{3}\}$ (ج) $\{\frac{4\pi}{3}\}$ (د) $\{\frac{5\pi}{3}\}$

(١٢) مجموعة حل المعادلة : $\sin \theta = 1 + \theta$ هي $\theta \in [\pi, 0]$ هي

- (أ) \emptyset (ب) $\{\frac{\pi}{2}\}$ (ج) $\{\pi\}$ (د) $\{\frac{\pi}{4}\}$

• (١٣) إذا كان : $\theta = 2$ حيث $0 \leq \theta < 180^\circ$ فإن : $\theta =$

- (أ) 60° (ب) 30° (ج) 120° (د) 150°

(١٤) الحل العام للمعادلة : $\sqrt{2} \sin \theta = 1 - \theta$ هو (أ) $\theta \in \mathbb{R}$

- (أ) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (ب) $\frac{\pi}{2} \pm \pi n$ (ج) $\frac{\pi}{4} + \pi n$ (د) $\frac{\pi}{4} \pm \pi n$

(١٥) الحل العام للمعادلة : $\sin \theta = \frac{1}{2}$ هو (أ) $\theta \in \mathbb{R}$

- (أ) $\frac{\pi}{2} \pm \pi n$ (ب) $\frac{\pi}{2} \pm \pi n$ (ج) $\frac{\pi}{4} \pm \pi n$ (د) $\frac{\pi}{4} \pm \pi n$

(١٦) الحل العام للمعادلة : $\sqrt{2} \sin \theta = (\theta - \frac{\pi}{2})$ هو (أ) $\theta \in \mathbb{R}$

- (أ) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (ب) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (ج) $\frac{\pi}{4} + \pi n$ (د) $\frac{\pi}{4} + \pi n$

(١٧) إذا كان : $\theta = 5$ ما س $12 = \theta$ حيث $0 \leq \theta < 180^\circ$ فإن : س =

- (أ) $105^\circ 22' 48''$ (ب) $112^\circ 27' 12''$ (ج) $22^\circ 27' 12''$ (د) $67^\circ 22' 48''$

(١٨) إذا كانت : $\theta = 1$ حيث $\theta \in [\pi, 0]$ فإن : $\theta =$

- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) π (د) $\frac{\pi}{2}$

(١٩) إذا كان : $0 \leq \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sin \theta = \frac{1}{2}$ هي

- (أ) $\{30^\circ\}$ (ب) $\{30^\circ, 150^\circ\}$ (ج) $\{210^\circ, 330^\circ\}$ (د) \emptyset

(٢٠) إذا كان : ما س $\frac{1}{2} = \theta$ ، ما س $\frac{\sqrt{2}}{2} = \theta$ حيث $\theta \in [\pi, 0]$ فإن : س =

- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(٢١) إذا كانت س $\theta \in [\pi, 0]$ فإن مجموعة حل المعادلة : ما س $\frac{1}{2} = \theta$ هي نفسها مجموعة حل المعادلة

(أ) ما س $2 = \theta$ (ب) ما س $2 = \theta$

(ج) ما س $2 = \theta$ (د) ما س $2 = \theta$

(٢٢) إذا كانت : $\theta \in [\pi, 0]$ فإن عدد حلول المعادلة : ما س $2 = \theta$ هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٢٣) إذا كانت : $0 \leq \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : ما س $2 = \theta$ هي

- (أ) $\{30^\circ, 210^\circ\}$ (ب) $\{150^\circ, 210^\circ\}$

- (ج) $\{330^\circ, 150^\circ\}$ (د) $\{210^\circ, 330^\circ\}$

(٢٤) إذا كانت : $0 \leq \theta < \pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ هي

- (أ) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ (ج) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

(٢٥) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sin^2 \theta = 1 - \theta$ هي

- (أ) $\{0^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$ (ب) $\{0^\circ, 45^\circ\}$

- (ج) $\{135^\circ, 225^\circ\}$ (د) $\{45^\circ, 225^\circ\}$

(٢٦) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sin^2 \theta - \theta = 0$ هي

- (أ) $\{0^\circ, 90^\circ\}$ (ب) $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$

- (ج) $\{0^\circ, 90^\circ, 270^\circ\}$ (د) $\{90^\circ, 270^\circ\}$

(٢٧) إذا كانت : $0 \leq \theta < \pi$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\frac{\sin^2 \theta - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 2$ هي

- (أ) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$

- (ج) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$

(٢٨) إذا كانت : $0^\circ < \theta \leq 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{3} \sin(\theta + 30^\circ) = \sin(\theta + 20^\circ)$ هي

- (أ) $\{30^\circ, 120^\circ\}$ (ب) $\{60^\circ, 240^\circ\}$

- (ج) $\{15^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}$ (د) $\{15^\circ, 105^\circ, 195^\circ, 285^\circ\}$

(٢٩) إذا كان : $\theta \in [0, \pi]$ فإن مجموعة الحل للمعادلة : $\sin \theta + \cos \theta = 2$ تساوى

- (أ) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ (ج) $\{\pi\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(٣٠) عدد حلول المعادلة : $\sin^2 \theta - \theta = 4 + \theta$ يساوى

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٣١) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sin^2 \theta - \theta = 3 - \theta$ هي

- (أ) $\{30^\circ, 150^\circ\}$ (ب) $\{60^\circ, 120^\circ\}$

- (ج) $\{60^\circ, 240^\circ\}$ (د) $\{120^\circ, 240^\circ\}$

(٣٢) إذا كانت : $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\sin^2 \theta + 2\cos \theta = 1$ هي

- (أ) $\{240^\circ\}$ (ب) $\{210^\circ\}$ (ج) $\{225^\circ\}$ (د) $\{330^\circ\}$

(٣٣) أي من قيم \sin التالية تحقق المعادلة : $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؟

- (أ) 10° (ب) 30° (ج) 45° (د) 60°

(٣٤) إذا كانت : $\theta \in [0, \pi]$ فإن عدد حلول المعادلة : $\theta \sin \theta = \frac{1}{\pi}$ يساوى

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٣٥) إذا كانت : $0 < \theta < \pi$ فإن عدد حلول المعادلة : $\theta^2 \sin \theta - \theta = \frac{1}{\pi}$ يساوى

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٦) إذا كانت : $\theta \in [0, \pi]$ وكانت S هي مجموعة حل المعادلة : $\theta = 0$ ، V هي مجموعة حل المعادلة : $\theta = \frac{1}{\pi}$ فإن مجموعة حل المعادلة : $\theta (2 - \theta) = 0$ هي

- (أ) $S \cap V$ (ب) $S \cup V$ (ج) $S - V$ (د) $V - S$

(٣٧) إذا كانت : $\theta \in [0, \pi]$ وكانت S تمثل مجموعة حل المعادلتين : $\theta = \frac{1}{\pi}$ ، $\theta = \frac{1}{2\pi}$ وكانت V تمثل مجموعة حل المعادلة : $\theta \sin \theta = \theta$ فإن :

- (أ) $S = V$ (ب) $S \supset V$ (ج) $V \supset S$ (د) $V(S) < V(V)$

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : $(\theta + 1)^2 \sin \theta = 2 + \theta \sin \theta$ حيث $0 \leq \theta < 360^\circ$ هي

- (أ) $\{0^\circ\}$ (ب) $\{0^\circ, 180^\circ\}$ (ج) $\{180^\circ, 270^\circ\}$ (د) $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$

(٣٩) إذا كانت : $S, V \in [0, \pi]$ ، $\theta = S + V$ فإن مجموعة قيم θ التى تحقق أن $\sin S \sin V = 1$ تساوى

- (أ) $\{\pi, 2\pi\}$ (ب) $\{\pi, 2\pi\}$ (ج) $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$

(٤٠) إذا كان الحل العام للمعادلة : $\theta = 2\pi - 4$ هو $\frac{\pi}{2} + \pi n$ حيث n عدد صحيح فإن :

- (أ) صفر (ب) ١- (ج) ١ (د) $\frac{0}{\pi}$

(٤١) الحل العام للمعادلة : $\theta = \frac{\pi}{2}$ صفر هو

- (أ) πn (ب) $\pi n + \frac{\pi}{2}$ (ج) $\pi n + \frac{\pi}{4}$ (د) $3\pi n$

(٤٢) الحل العام للمعادلة : $\theta \sin \theta = 0$ هو (حيث $n \in \mathbb{Z}$)

- (أ) $2\pi n$ (ب) πn (ج) $\frac{\pi}{2} n$ (د) $\frac{\pi}{4} n$

(٤٣) إذا كانت : $\theta \in [0, \pi]$ فإن عدد حلول المعادلة : $\sqrt{\theta} = \frac{1}{\pi}$ يساوى

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

(٤٤) مجموعة حل المعادلة : $\theta + \sqrt{\theta} = \sqrt{2}$ حيث $0 < \theta < \pi$ هي

- (أ) $\{\frac{\pi}{6}\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$ (ج) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$

(٤٥) إذا كانت : $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ وكانت : $\theta + \sqrt{\theta} = 2$ فإن : $\theta + \sqrt{\theta} = 0$

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٦ (د) ٨

(٤٦) إذا كان θ أحد جذرى المعادلة : $S^2 - S \cos \theta + \theta = \frac{1}{\pi}$ فإن إحدى قيم θ هي

- (أ) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 120°

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

| | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|---|
| $\frac{1}{y} = \theta$ (١) | $\frac{\sqrt{y}}{y} = \theta$ (٢) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٣) |
| $\frac{\sqrt{y}}{y} = \theta$ (٤) | $\frac{1}{y} = \theta$ (٥) | $1 - \theta = 0$ (٦) |
| $2 - \theta = 0$ (٧) | $\sqrt{y} = \theta$ (٨) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٩) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٠) | $2 - \theta = 0$ (١١) | $\frac{1}{y} = (\theta - \frac{\pi}{y})$ (١٢) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٣) | $\frac{\sqrt{y}}{y} = \theta$ (١٤) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٥) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٦) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٧) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٨) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٩) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢٠) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢١) |

إذا كانت $\theta \in [0, \pi]$ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

| | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٣) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٤) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٥) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٦) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٧) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٨) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٩) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٠) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١١) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٢) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٣) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٤) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٥) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٦) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٧) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٨) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١٩) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢٠) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢١) |

أوجد حل كل من المعادلات الآتية في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$:

| | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢) |
|-----------------------------|-----------------------------|

حل المعادلة : $\sqrt{y} - \theta = 0$ إذا كانت : $0 < \theta < 180^\circ$

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

| | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (١) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٢) |
| $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٣) | $\sqrt{y} - \theta = 0$ (٤) |

٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في الفترة $[\pi, 0]$:

$$\begin{array}{l} (١) \quad ٢ \sin^2 \theta - ٥ \sin \theta + ٢ = ٠ \\ (٢) \quad ٤ \sin^2 \theta + ٨ \sin \theta + ٣ = ٠ \\ (٣) \quad ٢ \sin^2 \theta - \sin \theta - ١ = ٠ \\ (٤) \quad ٢ \sin^2 \theta - ٧ \sin \theta + ٢ = ٠ \end{array}$$

٧ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلتين : $٢ \sin \theta = ١$ ، $\sin \theta = \sqrt{3}$.

٨ أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sin \theta = \left(\frac{\theta}{\pi} \right)$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول المعادلة : $\sin \theta = ٠$ حيث $\theta \in [\pi, ٠]$ هو

(١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

(٢) إذا كان : $\sin \theta + \cos \theta = ٢$ فإن :

(١) $\sin \theta + \cos \theta = \text{صفر}$ (ب) $\sin \theta - \cos \theta = ١$

(ج) $\sin \theta - \cos \theta = ١$ (د) $\sin \theta + \cos \theta = -١$

(٣) مجموعة حل المعادلة : $\sin \theta + \cos \theta = ٢$ حيث $\theta \in [\pi, ٠]$ هي

(١) $\{\frac{\pi}{2}\}$ (ب) $\{\text{صفر}\}$ (ج) $\{\frac{\pi}{2}, \text{صفر}\}$ (د) \emptyset

(٤) إذا كانت $٠ \leq \theta \leq ٣٦٠^\circ$ فإن عدد حلول المعادلة : $\sin \theta = \cos \theta$ هو

(١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٥) إذا كان : $\sin \theta + \cos \theta = ٢$ فإن : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \dots$

(١) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٦) قيم θ التي تجعل جذرى المعادلة التربيعية : $\sin^2 \theta + ٢ \sin \theta + ٢ = ٠$ متساويين

حيث $\theta \in [\pi, ٠]$ هي

(١) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

(٧) مجموع حلول المعادلة : $\sin^2 \theta - \sin \theta - \cos \theta = ٠$ هو

حيث $\theta \in [\pi, ٠]$ هو

(١) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) ٢π (د) ٤π

(٨) مجموع حلول المعادلة : $\sin 2\theta = -\cos 2\theta$ حيث $\theta \in [0, \pi]$ هو

- (١) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{8}$ (ج) $\frac{\pi}{9}$ (د) $\frac{\pi}{11}$

(٩) إذا كانت $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ وكانت للمعادلة : $\sin^2 \theta - (\cos \theta + \frac{1}{\theta}) = 1$ صفر جذر وحيد موجب

فإن : $\sin \theta = \cos \theta$

- (١) ٤ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

(١٠) إذا كان : $\sin 4\theta = \sin 2\theta + \cos 2\theta = 2$ فإن : $\sin \theta = \dots$ حيث $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$

- (١) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{5}{12}$ (ج) $\frac{7}{24}$ (د) $\frac{8}{15}$

(١١) الحل العام للمعادلة : $\sin \theta - \cos \theta = \sin \theta$ هو

- (١) $\pi n + \frac{\pi}{4} \times \sqrt{1-n}$ (ب) $\pi n + \frac{\pi}{4}$
(ج) $\pi n + \frac{\pi}{4}$ (د) $\pi n + \frac{\pi}{4} - 2$

٢ إذا كانت $\theta \in [0, \pi]$ فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

- | | |
|---|---|
| (١) $\sin 2\theta + \cos \theta = 1 - (\theta - \frac{\pi}{4})$ | (٢) $\sin 4\theta + \cos \theta = 4 - \theta$ |
| (٣) $\sin^2 \theta = \cos \theta + \sin \theta$ | (٤) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 + \theta$ |
| (٥) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 - \theta$ | (٦) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 + (\sqrt{2} + 1) - \theta$ |
| (٧) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 7$ | (٨) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 5 + \theta$ |

حل المثلث القائم الزاوية



- أى مثلث يحتوى على ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، والمقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه الغير معلومة.
 - لحل المثلث القائم الزاوية يلزم معرفة ٠ طولى ضلعين فيه أ، طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتي الحادتين.
 - تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة ونظرية فيثاغورث فى حل المثلث القائم الزاوية حيث .
- فى المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب



$$\boxed{1} \text{ ما } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{ب}{ح} , \text{ ما } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{ا}{ح}$$

$$\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{ب}{ا}$$

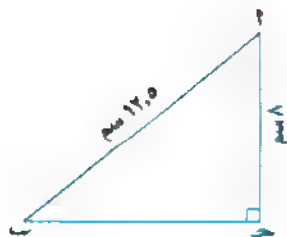
$$\boxed{2} \text{ } (ا)^2 + (ب)^2 = (ح)^2$$

حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولاً ضلعين

مثال ١

حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ح والذى فيه : ا ح = ٨ سم ، ا ب = ١٢,٥ سم

الحل



$$\therefore \frac{ا}{ح} = \frac{ا}{٨}$$

$$\therefore \frac{ا}{ح} = \frac{١٢,٥}{٨}$$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ح (ب) $\approx ٣٩ \text{ } ٤٧ \text{ } ٤١$

$$\therefore \text{ ح (ب) } = ٣٩ \text{ } ٤٧ \text{ } ٤١$$

$$\therefore \text{ ح (ا) } = ٩٠ - ٣٩ \text{ } ٤٧ \text{ } ٤١ = ٥٠ \text{ } ١٢ \text{ } ٢٩$$

مثال ٥

حل المثلث ٢ ب ح القائم الزاوية في ب مقرباً قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

١) ب (د) = $٩١,٢٥٤^\circ$ ، ب ح = $١٠,٦$ سم ٢) ب (د ح) = $٩٠,٧١٥^\circ$ ، ب ح = ٢٣ سم

الحل

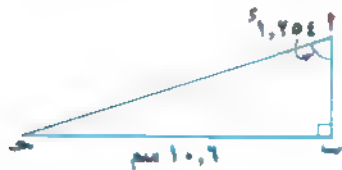
لاحظ أنه

يجب تحويل نظام الآلة الحاسبة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل إجراء العمليات الحسابية التي تحتوى على دوال مثلثية لزوايا مقدرة بالراديان

وذلك بالضغط على  ثم  ثم 4

لاحظ أن

٩٠° تكافئ $\frac{\pi}{2}$ راديان



١) ب (د ح) = $٩١,٢٥٤ - \frac{\pi}{2} \approx ٩٠,٣١٧^\circ$

• \therefore ما ب = ٩ ما $\therefore \frac{\text{ب ح}}{\text{ب ح}} = ٩$ ما $\therefore \frac{١٠,٦}{٩} = ٩,٢٥٤$ ما

• \therefore ب ح = $١١,١٥٥$ سم $\therefore \frac{١٠,٦}{٩,٢٥٤} = ١١,١٥٥$ سم

• \therefore ط ب = ٩ ط $\therefore \frac{\text{ب ح}}{\text{ب ح}} = ٩$ ط $\therefore \frac{١٠,٦}{٩} = ٩,٢٥٤$ ط

• \therefore ب ح = $٣,٤٧٥$ سم $\therefore \frac{١٠,٦}{٩,٢٥٤} = ٣,٤٧٥$ سم

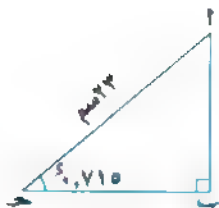
٢) ب (د ح) = $٩٠,٧١٥ - \frac{\pi}{2} \approx ٩٠,٨٥٦^\circ$

• \therefore ما ب = ٩ ما $\therefore \frac{\text{ب ح}}{\text{ب ح}} = ٩$ ما $\therefore \frac{٢٣}{٩} = ٩,٧١٥$ ما

• \therefore ب ح = $١٥,٠٧٩$ سم $\therefore ٢٣ \times ٩,٧١٥ = ١٥,٠٧٩$ سم

• \therefore ما ح = ٩ ما $\therefore \frac{\text{ب ح}}{\text{ب ح}} = ٩$ ما $\therefore \frac{٢٣}{٩} = ٩,٧١٥$ ما

• \therefore ب ح = $١٧,٢٦٧$ سم $\therefore ٢٣ \times ٩,٧١٥ = ١٧,٢٦٧$ سم



حاول بنفسك

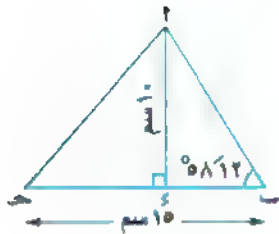
حل المثلث ٢ ب ح القائم الزاوية في ب مقرباً قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتيمترات إذا كان :

١) ب (د ح) = $٩٠,٦٢٣^\circ$ ، ب ح = ١٠ سم ٢) ب (د ح) = $٩١,٠٧٣^\circ$ ، ب ح = $٢٧,٥$ سم

مثال 6

أب ح مثلك فيه : ق (د ب) = 81.2° ، س ح = 15 سم ، رسم س أ \perp س ح حيث \exists س ح ، س أ = 10 سم أوجد : ق (د ح)

الحل



• في \triangle س أ ب : \therefore ط أ $81.2^\circ = \frac{10}{س أ}$

\therefore س أ = $\frac{10}{\sin 81.2^\circ} \approx 6.2$ سم

\therefore س ح = $15 - 6.2 = 8.8$ سم

• في \triangle س أ ح : \therefore ط أ ح = $\frac{10}{8.8}$

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : ق (د ح) = 48.29°

مثال 7

دائرة طول نصف قطرها 6 سم رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها 100° احسب طول هذا الوتر لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

الحل



نرسم س أ \perp س ب يقطعه في و

\therefore س أ \perp س ب

\therefore س منتصف أ ب

\therefore س ي ينصف د أ ب

، \therefore م أ = م ب = م ق

\therefore ق (د أ م) = $50^\circ = 100^\circ \div 2$

\triangle س أ م فيه : ق (د أ م) = 90°

\therefore م أ = (د أ م) = $\frac{س أ}{\sin 50^\circ}$

\therefore م أ = $50^\circ = \frac{س أ}{\sin 50^\circ}$

\therefore أ ب = $2 \times 5.2 \approx 10.4$ سم

\therefore س أ = $6 \times \sin 50^\circ \approx 4.596$ سم

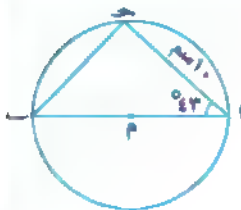
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

، ق (د أ م) = 43° ، أ ح = 10 سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م لأقرب رقمين عشريين.





اختبر نفسك

مستويات عليا

على حل المثلث القائم الزاوية

تمارين

10

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يمكن حل المثلث القائم الزاوية في كل الحالات الآتية ما عدا أن يكون المعطى

(١) طولاً ضلعين في المثلث.

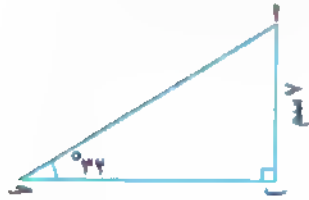
(ب) طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

(ج) قياساً زاويتين في المثلث.

(د) طول أحد ضلعي القائمة وطول الوتر.

(٢) في الشكل المقابل :

أ ح = سم



(ب) ٨,٢

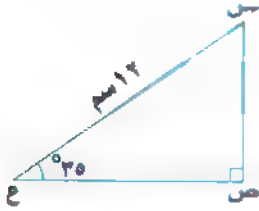
(١) ١٣,٢

(د) ٥,٩

(ج) ٣,٧

(٣) في الشكل المقابل :

ح ص = سم.



(ب) ٦,٩

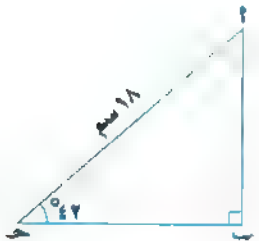
(١) ٩,٨

(د) ١٤,٦

(ج) ٨,٤

(٤) في الشكل المقابل :

طول ب ح = سم.



(١) ١٢

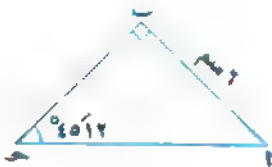
(ب) ١٣

(ج) ١٦

(د) ٢٤

(٥) في الشكل المقابل :

طول ب ح = سم.

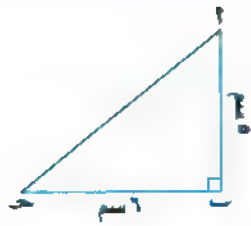


(ب) ٤

(١) ٦

(د) ٥

(ج) ٩



(٦) في الشكل المقابل :

و (دح) =

(ب) $39^\circ 48'$

(١) $56^\circ 27'$

(د) $50^\circ 12'$

(ج) $23^\circ 22'$

(٧) إذا كان المثلث $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B ، $AB = 5$ سم ، $BC = 3\sqrt{2}$ سم

فإن : و (دح) =

(د) 56°

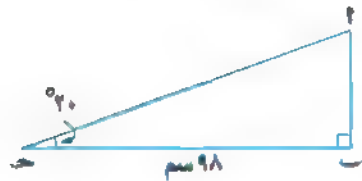
(ج) 45°

(ب) 30°

(١) 60°

(٨) في الشكل المقابل :

$AB =$ سم.



(ب) 98 cm

(١) 98 cm

(د) 98 cm

(ج) 98 cm

(٩) إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B ، و (د) 925° ، $BC = 8$ سم

فإن : $AB =$ سم.

(د) 11

(ج) 6

(ب) 13

(١) 10

(١٠) إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B ، و (دح) $54^\circ 13'$ ، $BC = 20$ سم

فإن : طول $AB =$ سم.

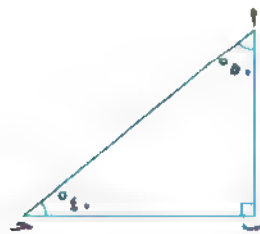
(د) 27,7

(ج) 14,4

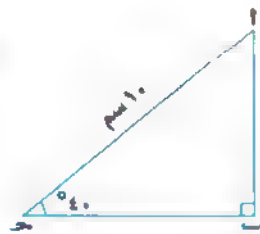
(ب) 11,7

(١) 16,2

(١١) في أي الأشكال الآتية لا يمكن حل المثلث $\triangle ABC$ ؟



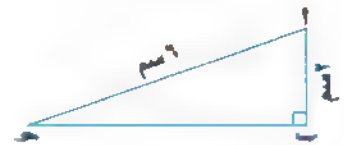
(د)



(ج)



(ب)



(١)

(١٢) إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية في A فإن :

أولاً : $BC =$

(د) AB قاطع

(ج) AB طاب

(ب) AB قاطع

(١) AB قاطع

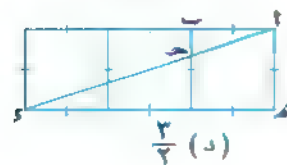
ثانياً : $AB =$

(د) AB طاب

(ج) AB قاطع

(ب) AB قاطع

(١) AB طاب



(د) $\frac{2}{3}$

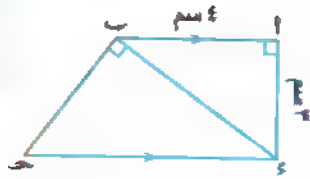
(ج) $\frac{2}{3}$

(ب) $\frac{1}{4}$

(١) $\frac{1}{4}$

(١٣) الشكل المقابل يتكون من 3 مربعات متلاصقة ، إذا كان طول ضلع

كل منها يساوي 2 سم فإن : $BC =$ سم



- (ب) $\frac{2}{3}$
(د) 2

(١٤) في الشكل المقابل :

طول \overline{BC} = سم.

(١) 5

(ج) $2\frac{2}{3}$

(١٥) في الشكل المقابل :

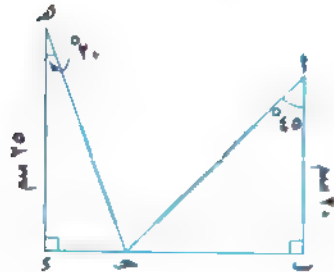
طول \overline{BC} = سم.

(١) 9

(ب) 29

(ج) 22

(د) 28,5



(١٦) \overline{AB} و \overline{BC} مثلث متساوي الساقين فيه : $\overline{AB} = \overline{BC} = 14,8$ سم ، $\angle C = 42^\circ$ ، $\angle A = 64^\circ$

فإن : طول \overline{BC} = سم.

(١) 25,2

(ب) 15,8

(ج) 18,7

(د) 25,8

(١٧) في الشكل المقابل :

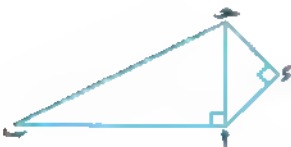
$\overline{AB} \times \overline{BC} = \dots\dots\dots$

(١) ما (د) ح (ب) ما (د) ح (أ)

(ب) ما (د) ح (ب) ما (د) ح (أ)

(ج) ما (د) ح (ب) ما (د) ح (أ)

(د) ما (د) ح (ب) ما (د) ح (أ)

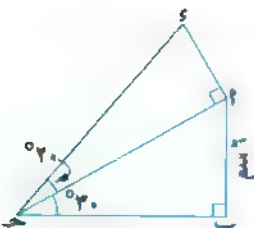


(١٨) في الشكل المقابل :

$\overline{AB} = \dots\dots\dots$ سم.

(١) 6 ق 30 ق 20 ق 20 (ب) 6 ق 30 ق 20 ق 20

(ج) 6 ق 30 ق 20 ق 20 (د) 6 ق 30 ق 20 ق 20



(١٩) في الشكل المقابل :

\overline{AB} و \overline{BC} قائم الزاوية في ب

وكان : $\overline{AB} = 5$ سم ، $\overline{BC} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$ سم ، $\overline{AC} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ سم

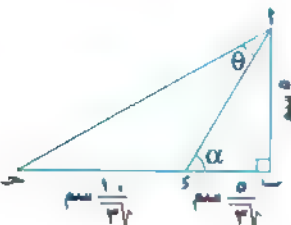
فإن : $\alpha - \theta = \dots\dots\dots$

(١) 1

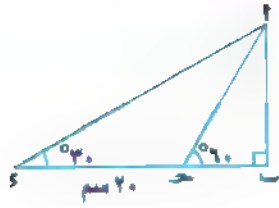
(ب) $\frac{2}{3}$

(ج) $\frac{5}{2}$

(د) $\frac{5}{3\sqrt{2}}$



(٢٠) في الشكل المقابل :



ΔABC حقائق الزاوية في B

$\angle C = \angle E$ بحيث $\angle C = 90^\circ$ سم

فإن : $AB = \dots$ سم.

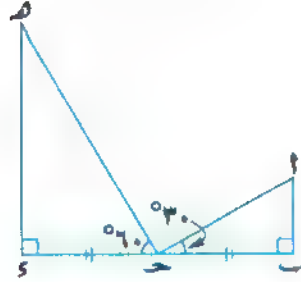
(د) ١٠

(ج) ١٥

(ب) ٢٠

(١) $3\sqrt{3}$

(٢١) في الشكل المقابل :



ΔABC ، ΔCDE مثلثان قائما الزاوية في B ، E على الترتيب

فإذا كان : C منتصف AB فإن : $\frac{CD}{CE} = \dots$

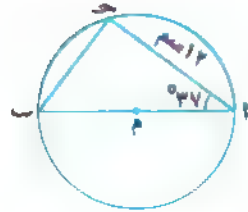
(ب) ٣ : ٥

(١) ٢ : ٣

(د) ١ : ٢

(ج) ١ : ٢

(٢٢) ΔABC يبين الشكل المقابل :



دائرة مركزها M ، AB قطر فيها

، فإذا كان : $AC = 12$ سم ، $\angle C = 37^\circ$

فإن طول نصف قطر الدائرة = \dots سم

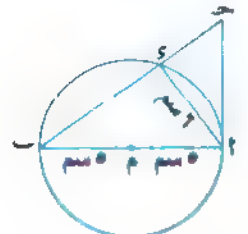
(د) ٤.٧٩

(ج) ٧.٩٦

(ب) ٩.٩٧

(١) ٧.٥١

(٢٣) في الشكل المقابل :



الدائرة M طول نصف قطرها ٥ سم

، AC مماس للدائرة عند A ، $\angle C = 6^\circ$ سم

فإن : $\angle C = \dots$

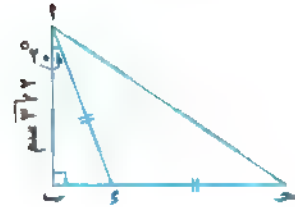
(د) 37°

(ج) 39°

(ب) 31°

(١) 53°

(٢٤) في الشكل المقابل :



طول $AC = \dots$ سم.

(ب) ١٠

(١) ٦

(د) ٥

(ج) ٤

(٢٥) ΔABC ح مثلث ، رسم $AC \perp BC$ فإذا كان : $AC = 6$ سم ، $\angle C = 52^\circ$ ، $\angle A = 28^\circ$

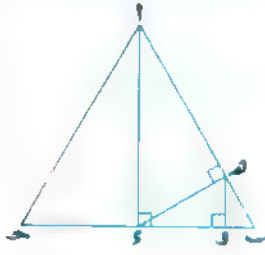
فإن طول $BC = \dots$ سم.

(د) ١٨

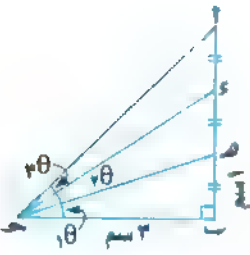
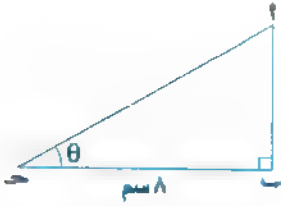
(ج) ١٧

(ب) ١٦

(١) ٢٠



$$\frac{3\sqrt{2}}{7} \quad (د)$$



$$1 - \sqrt{2} \quad (د)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (ج)$$

$$(ب) \text{ مئاً ح}$$

$$(ا) \text{ حاً ح}$$

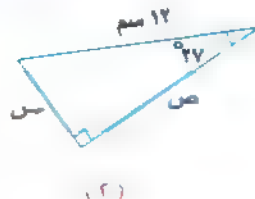
الأسئلة المقابلة

ناتج

أوجد قيمة كل من \sin ، \cos في كل شكل من الأشكال الآتية :



(3)



(2)



(1)

(26) في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه = 10 سم

$$\overline{AE} \perp \overline{BC}, \overline{DF} \perp \overline{AB}, \overline{EH} \perp \overline{AC}$$

فإن : $EH + DF + AE = \dots$ سم.

$$\frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3\sqrt{15}}{4} \quad (ب)$$

$$\frac{3\sqrt{15}}{8} \quad (ج)$$

(27) في الشكل المقابل :

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right] \ni \theta$$

فإن : $\theta \ni \dots$

$$[16, 3\sqrt{16}] \quad (1)$$

$$[16, 3\sqrt{16}] \quad (ب)$$

$$[3\sqrt{16}, 16] \quad (ج)$$

$$[24, 3\sqrt{16}] \quad (د)$$

(28) في الشكل المقابل :

أي مما يأتي صحيح ؟

$$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 \quad (ب) \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \quad (1)$$

$$\theta_1 > \theta_2, \theta_2 > \theta_3 \quad (د) \quad \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \quad (ج)$$

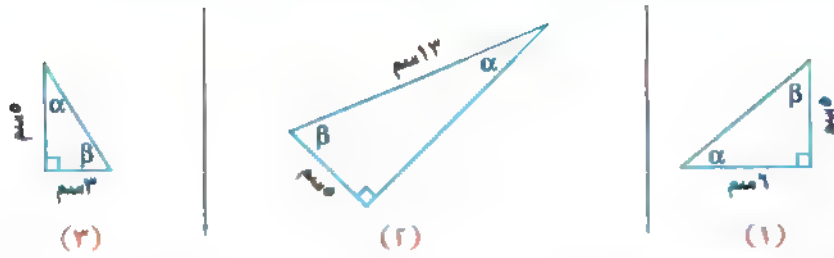
(29) في الشكل المقابل :

إذا كان : \overline{AC} قطر في الدائرة م

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس $\triangle ABC$

$$\dots \times \frac{\pi}{4} \times (ب) \times \dots$$

2 أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستيني في كل شكل من الأشكال الآتية :



3 أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب أوجد طول أ ب مقرباً لرقم عشري واحد إذا كان :

- (1) $\angle B = 32^\circ 18'$ ، $AB = 25$ سم
(2) $\angle B = 62^\circ 44'$ ، $AB = 16$ سم
(3) $\angle B = 42^\circ 8'$ ، $AB = 24$ سم

4 أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب أوجد $\angle C$ (د ح) لأقرب دقيقة إذا كان :

- (1) $AB = 12.6$ سم ، $AC = 18.6$ سم
(2) $AB = 54$ سم ، $AC = 88$ سم
(3) $AB = 27.2$ سم ، $AC = 20.4$ سم

5 حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية في ب مقرباً قياسات الزوايا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث :

- (1) $\angle B = 4^\circ$ سم ، $AB = 6$ سم
(2) $\angle B = 12.5^\circ$ سم ، $AB = 17.6$ سم
(3) $\angle B = 21^\circ$ سم ، $AB = 42$ سم

6 حل Δ أ ب ح القائم الزاوية في ب والذي فيه :

- (1) $AB = 24.6$ سم ، $AC = 16.2$ سم
(2) $\angle B = 62^\circ$ ، $AB = 76$ سم
(3) $\angle B = 62^\circ$ ، $AB = 12$ سم
(4) $\angle B = 39^\circ$ ، $AB = 62$ سم

7 حل المثلث أ ب ح القائم الزاوية في ب مقرباً الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة

أرقام عشرية من الستيمترات حيث :

- (1) $\angle B = 1.169^\circ$ ، $AB = 18$ سم
(2) $\angle B = 1.082^\circ$ ، $AB = 35.8$ سم

8 مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه 7 سم وقاعدته 10 سم.

احسب قياسات زواياه.

9 أ ب ح مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = ب ح ، $\angle C = 20^\circ$ ، $\angle A = 48^\circ 54'$

أوجد طول : أ ب لأقرب سنتيمتر.

« 15 سم »

١٠ س ص ع مثلث فيه : س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم
أثبت أن : المثلث قائم الزاوية في ص ثم أوجد : قياس زاوية س
« ٦٧ ٢٣ »

١١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم ، رسم $\overline{أ ح}$ قطر فيها ثم رسم الوتر $\overline{أ ب}$ طوله ١٠ سم
أوجد قياسات زوايا المثلث $\overline{أ ب ح}$
« ٣٨ ٤٠ ٥٦ ، ٩٠ ، ٥١ ١٩ ٤ »

١٢ دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر $\overline{أ ب}$ يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠ ،
احسب طول $\overline{أ ب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.
« ١١,٤٦٨ سم »

١٣ $\overline{أ ب ح}$ معين طولاً قطريه $\overline{أ ح}$ ، $\overline{ب ح}$ هما ١٨,٨ سم ، ٢٤,٦ سم
أوجد : \angle (د \angle ح) لأقرب دقيقة.
« ٧٤ ٤٧ »

١٤ قطعة أرض على شكل معين $\overline{أ ب ح د}$ طول ضلعه ١٠ أمتار ، \angle (د \angle ح) = ١٠٤ ١٦
أوجد : طولى قطريه $\overline{أ ح}$ ، $\overline{ب د}$
« ١٥,٧٩ مترًا تقريبًا ، ١٢,٢٨ مترًا تقريبًا »

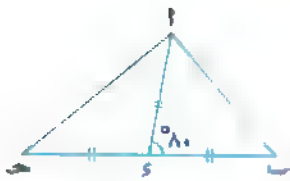
١٥ $\overline{أ ب ح د}$ مستطيل طول قطره $\overline{أ ح}$ = ٢٤,٨ سم ، \angle (د \angle ح) = ٢٣ ٤٦
أوجد طول كل من : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ح}$
« ٩,٩ سم تقريبًا ، ٢٢,٧ سم تقريبًا »

١٦ $\overline{أ ب ح د}$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه :
 $\overline{س د} // \overline{ب ح}$ ، $\overline{أ ب} = \overline{د ح} = ٥$ سم ، $\overline{س د} = ٤$ سم ، $\overline{ب ح} = ١٠$ سم.
أوجد قياس كل من زواياه الأربعة.
« ٥٣ ٨ ، ١٢٦ ٥٢ ، ٥٣ ٨ ، ١٢٦ ٥٢ »

تالفا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{س د} \parallel \overline{ب ح}$ بحيث $\overline{س د} = \overline{ب ح} = ٥$ سم

، \angle (د \angle ح) = ٨٠ فإن : $\overline{أ ح}$ = سم

- (أ) ١٠ ما ٤٠ (ب) ١٠ ما ٥٠ (ج) ٥ ما ٨٠ (د) ٥ ما ٤٠

(٢) إذا كان : $\overline{أ ب ح د}$ مثلثاً قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي ٩ ، ١٢ ، ١٥ حيث $١ < ٩$

فإن قياس أكبر زواياه الحادة يساوي تقريباً.

- (أ) ٣٦ ٥٢ (ب) ٤٨ ١٨ (ج) ٥٣ ٨ (د) ٦٢ ٤٢

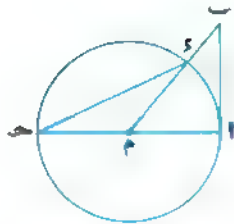
(٣) إذا كان $\triangle ABC$ مثلثاً قائم الزاوية في B ، $AB = 6$ سم ومحيط $\triangle ABC = 24$ سم
فإن : $\sin(A) = \dots\dots\dots$

- (١) 14° (ب) 18° (ج) 27° (د) 53°

(٤) إذا كان $\triangle ABC$ مثلثاً قائم الزاوية في B وكان $AB < AC$ ، مساحة $\triangle ABC = 20$ سم²
، $AB + AC = 20$ سم فإن : $\sin(A) = \dots\dots\dots$

- (١) 77.69° (ب) 54.27° (ج) 26.18° (د) 12.41°

(٥) في الشكل المقابل :



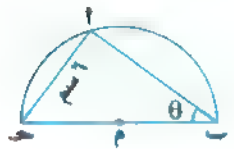
إذا كان : \overline{AC} قطرًا في دائرة M ، \overline{AB} مماسًا لها

، $AB = 6$ سم ، $BC = 5$ سم

فإن : $\sin(C) = \dots\dots\dots$

- (١) 50.62° (ب) 25.6° (ج) 18.41° (د) 27.49°

(٦) في الشكل المقابل :

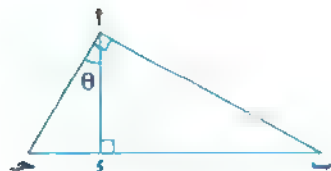


\overline{BC} قطر في دائرة M ، $AB = 6$ سم ، $\sin(A) = \theta$

فإن مساحة $\triangle ABC = \dots\dots\dots$ سم²

- (١) $6\sqrt{3}$ (ب) $6\sqrt{2}$ (ج) $18\sqrt{2}$ (د) $18\sqrt{3}$

(٧) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\triangle ABC$ مثلثاً قائم الزاوية في C

، $\overline{CS} \perp \overline{AB}$ ، $\sin(A) = \theta$

فإن : $\sin(B) = \dots\dots\dots$

- (١) $\sin(A)$ (ب) $\sin(B)$ (ج) $\sin(C)$ (د) $\sin(S)$

(٨) شكل خماسي منتظم طول ضلعه ٨٨ ، ٥ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = سم.

- (١) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض



زاوية الارتفاع



إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة ؟ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ أعلى مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع ؟ \overrightarrow{AB} الأفقي والشعاع ؟ \overrightarrow{AC} الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى زاوية ارتفاع الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة ؟

زاوية الانخفاض



إذا فُرض أن هناك راصد عند نقطة ؟ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ أسفل مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع ؟ \overrightarrow{AB} الأفقي والشعاع ؟ \overrightarrow{AC} الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى زاوية انخفاض الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة ؟

ملاحظة



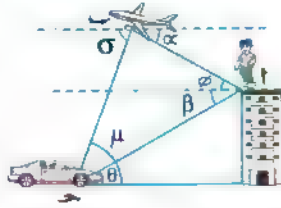
قياس زاوية انخفاض حـ بالنسبة إلى ؟ يساوي

قياس زاوية ارتفاع ؟ بالنسبة إلى حـ

وذلك لأن $\angle A = \angle B$ (د حـ) (بالتبادل)

تحقق من فهمك

باستخدام الشكل المقابل أكمل ما يأتي :

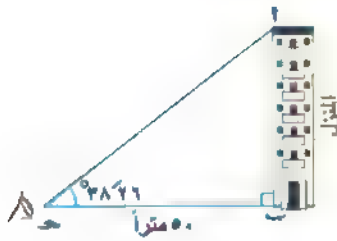


- ١ زاوية ارتفاع الشخص ا بالنسبة للسيارة ح هي
- ٢ زاوية انخفاض السيارة ح بالنسبة للطائرة ب هي
- ٣ زاوية ارتفاع الطائرة ب بالنسبة للشخص ا هي
- ٤ زاوية انخفاض الشخص ا بالنسبة للطائرة ب هي

مثال ١

من نقطة على سطح الأرض على بُعد ٥٠ متراً من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة في المنزل يساوي $38^\circ 26'$ أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

الحل



بفرض أن ب يمثل ارتفاع المنزل

$$\therefore \tan 38^\circ 26' = \frac{ب}{٥٠}$$

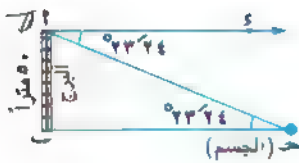
$$\therefore ب = ٥٠ \times \tan 38^\circ 26' \approx ٤٠ \text{ متراً.}$$

\therefore ارتفاع المنزل = ٤٠ متراً تقريباً.

مثال ٢

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متراً وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج يساوي $23^\circ 24'$ أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل



بفرض أن ب يمثل ارتفاع البرج

\therefore د هي زاوية انخفاض الجسم

$$\therefore \angle د = \angle ح = 23^\circ 24' \quad (\text{لأن } \overline{دأ} \parallel \overline{حأ})$$

$$\therefore \tan 23^\circ 24' = \frac{٥٠}{ج} \quad \therefore ج = \frac{٥٠}{\tan 23^\circ 24'} \approx ١١٦ \text{ متراً.}$$

\therefore بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٦ متراً تقريباً.

حاول بنفسك

من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متراً عن قاعدة عمود رأسى، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة العمود هو $18^\circ 42'$ أوجد لأقرب متر ارتفاع العمود عن سطح الأرض.

مثال ٣

وقف شخص طوله ١,٥ متر على بعد ١٠ أمتار من قاعدة سارية علم مثبتة رأسياً على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة في السارية يساوي 40.62° احسب طول السارية لأقرب متر.

الحل

بفرض أن: \overline{AB} يمثل ارتفاع السارية ، \overline{CD} يمثل طول الشخص

نرسم $\overline{CN} \parallel \overline{AB}$ حيث $N \in \overline{AB}$



$$\therefore \text{ط } \overline{AN} = 40.62^\circ = \frac{\overline{AN}}{10} \quad \therefore \overline{AN} = 10 \times \text{ط } 40.62^\circ \approx 8.5 \text{ متر}$$

، \therefore طول $\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB}$ حيث : $\overline{NB} = \overline{CD} = 1.5$ مترًا

$$\therefore \overline{AB} = 1.5 + 8.5 = 10 \quad \therefore \text{طول السارية} = 10 \text{ أمتار تقريبًا.}$$

مثال ٤

عمود إنارة ارتفاعه ٧,٤ متر يلقي ظلًا على الأرض طوله ٥,٥٥ متر.

أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل

بفرض أن: \overline{AB} يمثل عمود الإنارة

، \overline{CD} يمثل ظل عمود الإنارة على الأرض

، θ قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.



$$\therefore \text{ط } \overline{AB} = \theta = \frac{7.4}{5.55} \quad \therefore \theta \approx 53.748^\circ$$

$$\therefore \text{قياس زاوية ارتفاع الشمس بالراديان} = 53.748^\circ \times \frac{\pi}{180} \approx 0.937 \text{ راديان}$$

حاول بنفسك

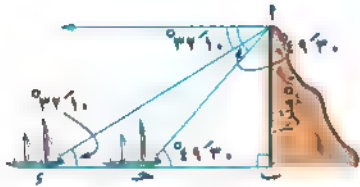
من قمة صخرة ارتفاعها ٢٠٠ متر عن سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٢٠٠ متر عن قاعدة الصخرة.
فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ متراً رصد شخص سفينتين في البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة فوجد أن قياسى زاويتي انخفاضيهما 32.6° ، 49.4° أوجد البعد بين السفينتين.

الحل

بفرض أن AB يمثل ارتفاع الصخرة ، BC البعد بين السفينتين.



$$\therefore \text{في } \triangle ABC : \text{طا} : \text{ب} : \text{و} = 32.6^\circ : 50$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{50}{\tan 32.6^\circ} = 79.5 \text{ متر تقريباً}$$

$$\text{في } \triangle ABD : \text{طا} : \text{ب} : \text{و} = 49.4^\circ : 50$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{50}{\tan 49.4^\circ} = 42.7 \text{ متر تقريباً}$$

$$\therefore \text{و} = 79.5 - 42.7 = 36.8 \text{ متر تقريباً}$$

مثال ٦

تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٤٠ متراً عن سطح البحر ، رصدت قمة المنارة في لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها 12° ، وبعد ٥ دقائق رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها 24° . احسب سرعة السفينة علماً بأن السفينة تسير بسرعة منتظمة.

الحل

بفرض أن : AB يمثل المنارة

وأن BC هي المسافة التي قطعتها السفينة في ٥ دقائق.

$$\therefore \text{في } \triangle ABC : \text{طا} : \text{ب} : \text{و} = 12^\circ : 40$$

$$\therefore \text{طا} = \frac{40}{\tan 12^\circ} = 191.73 \text{ متراً}$$

$$\text{في } \triangle ABD : \text{طا} : \text{ب} : \text{و} = 24^\circ : 40$$

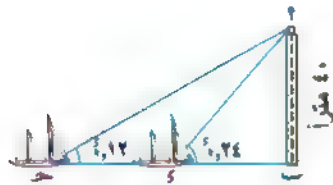
$$\therefore \text{طا} = \frac{40}{\tan 24^\circ} = 93.24$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{40}{\tan 24^\circ} = 93.24 \text{ متراً}$$

$$\therefore \text{و} = 191.73 - 93.24 = 98.49 \text{ متراً}$$

\therefore السفينة قطعت ٩٨,٤٩ متراً في ٥ دقائق.

$$\therefore \text{سرعة السفينة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{98.49}{5} = 19.7 \text{ م/دقيقة}$$



ملاحظة

عند حساب طول BC ، AB يجب تحويل الآلة

من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) بالضغط على



على زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسي • نذكر

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

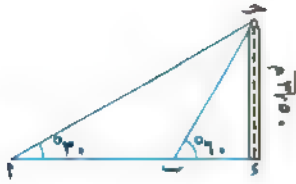
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٤٠ متراً عن قاعدة برج قياست زاوية ارتفاع قمة البرج فكان قياسها 72° فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوي متر.
- (أ) ١٢٠ (ب) ١٢١ (ج) ١٢٢ (د) ١٢٣
- (٢) رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها 40° فإن بعد الراصد عن الطائرة يساوي لأقرب متر.
- (أ) ٦٤٣ (ب) ١١٩٢ (ج) ١٣٠٥ (د) ١٥٥٦
- (٣) من قمة برج ارتفاعه ٨٠ متراً إذا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج 24° فإن بُعد الجسم عن قاعدة البرج يساوي تقريباً
- (أ) ١٩٥ متر (ب) ١٧٨ متر (ج) ٨٨ متر (د) ٣٦ متر
- (٤) من قمة منارة ارتفاعها ٨٠ متر عن سطح البحر قياست زاوية انخفاض هدف ثابت على سطح البحر فكان قياسها 80° ، فإن بُعد الهدف عن قمة المنارة يساوي متر تقريباً.
- (أ) ٧٨ (ب) ٧٩ (ج) ٨٠ (د) ٨١
- (٥) عمود إنارة طوله ٨ متر يلقي ظلًا على الأرض طوله ٥ متر ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ لأقرب درجة يساوي
- (أ) 32° (ب) 51° (ج) 39° (د) 58°
- (٦) من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متراً عن سطح البحر يكون قياس زاوية انخفاض قارب يُبعد عن قاعدة الصخرة ٢٠٠ متر بالراديان =^٦
- (أ) ٠,٠٨ (ب) ٠,٤٦ (ج) ٠,٢٥ (د) ٠,٢٤
- (٧) إذا سار شخص مسافة ١ كم على طريق منحدر يميل على سطح الأفقي بزاوية قياسها $22^\circ 15'$ فإن مقدار ارتفاعه عن المستوى الأفقي عندئذ يساوي متر تقريباً.
- (أ) ٩٢٥,٥ (ب) ٤٠٩,١ (ج) ٣٧٨,٦ (د) ٣٧٦,٨
- (٨) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ متراً ، فإذا كان قياس الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية يساوي 63° فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض = متر.
- (أ) ٢٧ (ب) ١٩ (ج) ٨٢ (د) ٨٠

(٩) شخص طوله ١٦٠ سم ويقف على سطح الأرض وعلى بُعد ٢٠ مترًا من شجرة رأسية وجد أن قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة في الشجرة يساوي $٣١^\circ ٤٨'$ فإن ارتفاع الشجرة = متر.

- (أ) ١٣ (ب) ١٤ (ج) ١٢ (د) ١١

(١٠) في الشكل المقابل :



إذا قيست زاويتا ارتفاع قمة برج طوله $٣\sqrt{٥٠}$ متر من النقطتين A ، B على نفس الخط الأفقي المار بقاعدة البرج فكان قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب فإن البعد بين النقطتين A ، B يساوي متر.

- (أ) $٣\sqrt{١٠٠}$ (ب) $٣\sqrt{٥٠}$ (ج) ١٠٠ (د) ٥٠

(١١) من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع قمة عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها فوجد أن قياسها ٢٨° فإن ارتفاع العمارة لأقرب متر يساوي متر.

- (أ) ٣٠ (ب) ٢٨ (ج) ٢٩ (د) ٣١

(١٢) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ مترًا ولاحظ سفينتين في البحر على شعاع أفقي واحد من قاعدة الصخرة ، وقاس زاويتي انخفاضيهما ، فوجد قياسيهما $١٢^\circ ٢٥'$ ، $٦^\circ ٥٣'$ فإن البعد بين السفينتين = متر.

- (أ) ١٩.٤ (ب) ١٧.٧ (ج) ٢٦.٧ (د) ٨٦.٧

(١٣) إذا كان قياس زاوية ارتفاع الشمس ٣٠° فإن طول ظل برج ارتفاعه ١٥٠ متر على سطح الأرض = متر.

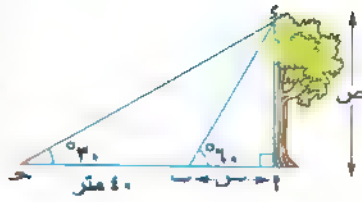
- (أ) $٣\sqrt{٧٥}$ (ب) $٣\sqrt{٢٠٠}$ (ج) $٣\sqrt{١٥٠}$ (د) $٢\sqrt{٧٥}$

(١٤) من قمة تل ارتفاعه ٣٠٠ متر كانت زاويتي انخفاض قمة وقاعدة برج مقابل قياساهما ٣٠° ، ٤٥° على الترتيب فإذا كان كلاً من قاعدة التل والبرج على نفس المستوى الأفقي فإن ارتفاع البرج = متر.

- (أ) $(٣\sqrt{٢} - ٣) ٥٠$ (ب) $(٣\sqrt{٢} - ٣) ٢٠٠$ (ج) $(٣\sqrt{٢} - ٣) ١٠٠$ (د) $(٣\sqrt{٢} - ٣) ١٥٠$

(١٥) إذا كان طول ظل برج رأسى على الأرض الأفقية عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٣٠° أكبر من طوله عندما كانت زاوية ارتفاع الشمس قياسها ٤٥° بمسافة ٦٠ متر فإن ارتفاع البرج = متر.

- (أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (ج) $٣\sqrt{٦٠}$ (د) $٣٠(١ + \sqrt{٣})$



(١٦) في الشكل المقابل :

شخص يقف على ضفة نهر وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة على الضفة الأخرى للنهر يساوي 60° وعندما تحرك ٤٠ متر مبتعداً عن الشجرة في اتجاه \overleftarrow{AB} فإن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة أصبح 30° فإن عرض النهر = متر.

- (١) ٦٠ (ب) ٤٠ (ج) ٣٠ (د) ٢٠

(١٧) قام شخص من قمة برج مراقبة ارتفاعه ٢٠٠ متر برصد سفينتين في البحر في نفس المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج وفي جهتين مختلفتين من برج المراقبة فكان زاويتي انخفازيهما 30° ، 45° فإن المسافة بين السفينتين \approx متر.

- (١) ٥٥٠ (ب) ٥٤٦ (ج) ٤٣٦ (د) ٦١٥

(١٨) من قاعدة وقمة منزل ارتفاعه ١٠ أمتار تم رصد زاويتي ارتفاع قمة برج مقابل فكانتا 60° ، 30° على الترتيب فإذا كان قاعدتي المنزل والبرج على نفس المستوى الأفقي فإن ارتفاع البرج = متر.

- (١) ١٠ (ب) ١٥ (ج) ٢٠ (د) ١٧,٥

الأسئلة المقالية

ثانياً

١ من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الشجرة 22° ، أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين.

٢ وجد شخص أن قياس زاوية ارتفاع قمة برج يساوي $39^\circ 41'$ فإذا كان الشخص يبعد عن قاعدة البرج مسافة ٥٠ متراً فما ارتفاع البرج ؟

٣ رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها $17^\circ 25'$ ، أوجد بعد الراصد عن الطائرة.

٤ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متراً من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة ، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالرايان ؟

٥ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض ، فوجد أن قياس زاوية انخفاضها هو 63° ، أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة والراصد.

٦ من قمة منارة ارتفاعها ٢٠٠ متر قيست زاوية انخفاض قارب في النهر فكان قياسها يساوي $31^\circ 44'$ فما بُعد القارب عن قاعدة المنارة إذا كان القارب يقع مع قاعدة المنارة في مستو أفقي واحد ؟

٧ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ متراً وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج يساوي $28^\circ 46'$ أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

٨ عمود إنارة طوله ٧.٢ متر يلقي ظلًا على الأرض طوله ٤.٨ متر
أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

«٠.٩٨٣°»

٩ من قمة برج ارتفاعه ١٦٠ مترًا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج هو ٣٥°
أوجد بُعد هذا الجسم عن كل من قاعدة البرج وقمته لأقرب متر.

«٢٢٩ مترًا تقريبًا ، ٢٧٩ مترًا تقريبًا»

١٠ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، ويرتفع عن سطح الأرض ٣.٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤°
أوجد لأقرب رقمين عشريين كلاً من :

(١) بعد الطرف السفلى عن الحائط. (٢) طول السلم.

«١.٨٥ مترًا تقريبًا ، ٤.٢٣ مترًا تقريبًا»

١١ إذا كان قياس زاوية ارتفاع منئذة من نقطة على بُعد ١٤٠ مترًا من قاعدتها يساوى ٤٦° فما هو ارتفاع المنئذة لأقرب متر ؟ وإذا قيست زاوية ارتفاع المنئذة نفسها من نقطة تبعد ١١٠ أمتار من قاعدتها فأوجد لأقرب دقيقة قياس زاوية ارتفاعها عندئذ.

«٧١ مترًا ، ٢٢°٥٠»

١٢ وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هو $\frac{\pi}{6}$ ، ولما سار الراصد في مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر وجد أن قياس زاوية الارتفاع هو $\frac{\pi}{4}$
أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر.

«١٠٩٣ مترًا تقريبًا»

١٣ وقف رجلان فى جهتين مختلفتين من سارية علم مثبتة رأسياً على سطح الأرض بحيث كان الرجلان وقاعدة السارية على مستقيم أفقى واحد. فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة السارية وكان قياسا زاويتي ارتفاعها هما ٤٦° ، ٤٧° أوجد البعد بين الرجلين
إذا كان طول السارية ١٢ مترًا (بفرض إهمال طولى الرجلين).

«١٩.٧ مترًا»

١٤ أ ب يمثل برجًا ارتفاعه ٥٠ مترًا قاعدته ب وقمته أ ، وقف شخصان أحدهما عند ح والآخر عند د حيث ب ، ح ، د تقع على مستقيم أفقى واحد ، بحيث ح تقع بين ب ، د فإذا رصد كل منهما زاوية ارتفاع قمة البرج ، كان قياسا زاويتي ارتفاع قمة البرج ١٣°٥٢ ، ٤٦°٥٤ على الترتيب فأوجد طول ح د (بفرض إهمال طولى الشخصين).

«١٠.٢ مترًا»

١٥ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترًا رصدت سفينتان فى البحر على شعاع أفقى واحد من قاعدة البرج فوجد أن قياسى زاويتي انخفاضيهما ٤٧° ، ٤١°٣٥ على الترتيب.
أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر.

«١٢ مترًا»

١٦ يقف شخص على بعد ٨٥ مترًا من قاعدة برج على قمته سارية علم فلاحظ أن قياسى زاويتي ارتفاع قمة السارية وقاعدة السارية ٥٦° ، ٥٤° على الترتيب.
أوجد طول سارية العلم لأقرب متر (بفرض إهمال طول الشخص).

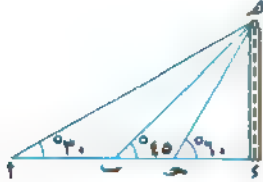
«٩ أمتار»

١٧ تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ مترًا، رصدت قمة المنارة في لحظة ما فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١١°، وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٢°، احسب سرعة السفينة علمًا بأنها تسير بسرعة منتظمة.

«١٥,٢ متر/دقيقة»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) في الشكل المقابل :

إذا كانت قياسات زوايا ارتفاع أعلى نقطة في البرج من ثلاث نقاط على الخط المؤدى لأسفل نقطة في البرج هي ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° على الترتيب فإن $1 : 2 : 3 =$

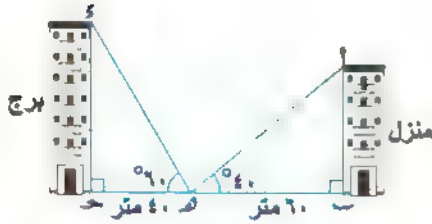
(د) $1 : \sqrt{3} : 3$

(ج) $\sqrt{3} : \sqrt{3} : 2\sqrt{3}$

(ب) $3 : 2 : 1$

(١) $\sqrt{3} : 1 : 3$

(٢) في الشكل المقابل :



ظل زاوية ارتفاع قمة البرج من قمة المنزل =

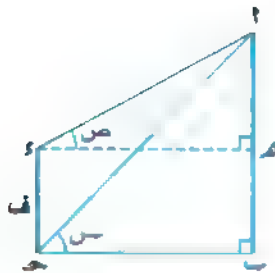
(١) $\frac{40^\circ \text{ من } 60^\circ - 60^\circ \text{ من } 40^\circ}{100}$

(ب) $\frac{40^\circ \text{ من } 60^\circ - 60^\circ \text{ من } 40^\circ}{100}$

(ج) $100^\circ \text{ من } 80^\circ$

(د) $40^\circ \text{ من } 60^\circ - 60^\circ \text{ من } 40^\circ$

(٣) في الشكل المقابل :



قيست زاويتا ارتفاع قمة جبل ٢ $\overline{1}$

من قاعدة وقمة منزل $\overline{3}$ ارتفاعه $\overline{ف}$ فوجد قياساهما على

الترتيب $\overline{3}$ ، $\overline{ص}$ فإن $1 : 2 =$

(ب) $\frac{\overline{ف} \text{ من } \overline{3}}{\overline{ف} \text{ من } \overline{ص} - \overline{ص} \text{ من } \overline{3}}$

(د) $\overline{ف} \text{ من } \overline{3} - \overline{ف} \text{ من } \overline{ص}$

(١) $\frac{\overline{ف} \text{ من } \overline{3}}{\overline{ف} \text{ من } \overline{ص}}$

(ج) $\overline{ف} \text{ من } \overline{ص} - \overline{ف} \text{ من } \overline{3}$

القطاع الدائري



تعريف

القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدود بـ قوس فيها وينصفى القطرين المارين بطرفي هذا القوس.

فإذا رسمنا في الدائرة م نصفى القطرين ١ م ، ٢ م

- كما في الشكل المقابل - فإن سطح الدائرة

ينقسم بهما إلى جزأين كل منهما يسمى «قطاع دائري».

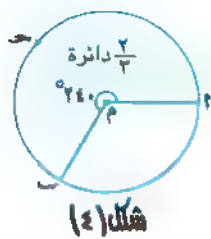
• فالجزء م ١ ح يسمى قطاعاً دائرياً أصغر بينما الجزء م ٢ ح يسمى قطاعاً دائرياً أكبر.

• وتسمى د م ٢ ب بزاوية القطاع الأصغر، د م ١ ب المنعكسة بزاوية القطاع الأكبر.

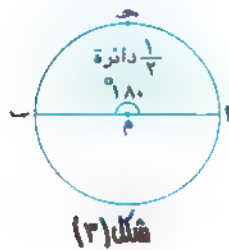
• ويسمى ١ ح بـ بقوس القطاع الأصغر ، ٢ ح بـ بقوس القطاع الأكبر.



مساحة القطاع الدائري



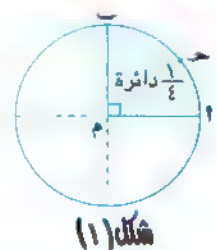
شكل (٤)



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

بملاحظة الأشكال السابقة نجد أن :

$$\text{شكل (١) : } \frac{\text{مساحة القطاع (م ١ ح ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{4} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{ق (د م ١ ب)}}{\text{قياس الدائرة م}}$$

$$\text{شكل (٢) : } \frac{\text{مساحة القطاع (م ١ ح ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{3} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{ق (د م ١ ب)}}{\text{قياس الدائرة م}}$$

$$\text{شكل (٣): } \frac{\text{مساحة القطاع (م ١ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{1}{2} , \frac{1}{2} = \frac{\text{قياس الدائرة م}}{180^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\text{شكل (٤): } \frac{\text{مساحة القطاع (م ١ حـ ب)}}{\text{مساحة الدائرة م}} = \frac{2}{3} , \frac{2}{3} = \frac{\text{قياس الدائرة م}}{360^\circ} = \frac{2}{3}$$

أى أن النسبة بين مساحة القطاع ومساحة الدائرة هي نفس النسبة بين قياس زاوية القطاع وقياس الدائرة.

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس الدائرة}}$$

وإذا رمزنا إلى : قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائري بالرمز θ وقياسها بالتقدير الستيني بالرمز $س$ ، طول نصف قطر الدائرة بالرمز $نق$ وطول قوس القطاع بالرمز $ل$ فإن :

$$\boxed{1} \quad \frac{\theta}{\pi} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi \text{ نق}^2} \quad \therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\theta}{\pi} \times \pi \text{ نق}^2$$

$$\boxed{\text{أى أن}} \quad \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2$$

$$\boxed{2} \quad \frac{س}{360^\circ} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi \text{ نق}^2} \quad \therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{س}{360^\circ} \times \pi \text{ نق}^2$$

$$\boxed{\text{أى أن}} \quad \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{س}{360^\circ} \times \text{مساحة الدائرة}$$

$$\boxed{3} \quad \frac{ل}{نق} = \theta$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 , \therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times \frac{ل}{نق} \times \text{نق}^2$$

$$\boxed{\text{أى أن}} \quad \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} ل \text{ نق}$$

ملاحظتان



١ يمكن اعتبار الدائرة قطاعاً دائرياً قياس زاويته 360°

وتكون مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة = $\pi \text{ نق}^2$

٢ محيط القطاع الدائري = $ل + 2 \text{ نق}$

مثال ١

أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه l في دائرة طول نصف قطرها n إذا كان قياس زاويته θ° بالتقدير الدائري ، s° بالتقدير الستيني في كل مما يأتي :

١] $n = 10$ سم ، $\theta = 1,5^\circ$ | ٢] $n = 10,5$ سم ، $s = 144^\circ$

٣] $n = 6$ سم ، $l = 4$ سم

الحل

١] مساحة القطاع $= \frac{1}{2} \theta n^2 = \frac{1}{2} \times 1,5 \times (10)^2 = 75$ سم^٢

٢] مساحة القطاع $= \frac{s}{360} \pi n^2 = \frac{144}{360} \pi \times (10,5)^2 \approx 138,5$ سم^٢

٣] مساحة القطاع $= \frac{1}{2} l n = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ سم^٢

حاول بنفسك

١] أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره $r = 7$ سم ، زاويته المركزية قياسها $2,1^\circ$

٢] أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره $r = 6,5$ سم وطول قوسه $l = 8$ سم

٣] أوجد مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته 60° في دائرة طول نصف قطرها 5 سم

مثال ٢

قطاع دائري طول نصف قطره 12 سم ، ومحيطه 55 سم أوجد مساحته.

الحل

∴ $n = 12$ سم ، محيط القطاع $= 55$ سم ، ∴ محيط القطاع $= 2n + l$

∴ $55 = 12 \times 2 + l$ ∴ $l = 31$ سم

∴ مساحة القطاع $= \frac{1}{2} l n = \frac{1}{2} \times 31 \times 12 = 186$ سم^٢

مثال ٣

قطاع دائري طول نصف قطره ١٥ سم ، ومساحته ٢٧٠ سم^٢ أوجد :

- ١) طول قوس القطاع . ٢) قياس زاوية القطاع بالقياسين الدائري والستيني .

الحل

١) ∴ نق = ١٥ سم ، مساحة القطاع = ٢٧٠ سم^٢ ، ∴ مساحة القطاع = $\frac{1}{2} \times \text{نق} \times \text{ل}$

∴ ل = ٢٦ سم

∴ $\frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{نق} = ٢٧٠$

∴ $\theta = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٢٦}{١٥} = ١.٧٣٣$

٢) ∴ ل = ٢٦ سم ، نق = ١٥ سم

∴ $\theta = \frac{١٨٠}{\pi} \times ١.٧٣٣ \approx ٩٨.٦^\circ$

مثال ٤

قطاع دائري مساحته ٧٥ سم^٢ ومحيطه ٣٥ سم

أوجد طول نصف قطره وقياس زاويته المركزية بالقياس الستيني .

الحل

(١) ∴ مساحة القطاع = ٧٥ ، ∴ $\frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{نق} = ٧٥$ ، ∴ ل نق = ١٥٠

(٢) ، ∴ محيط القطاع = ٣٥ ، ∴ ل + ٢ نق = ٣٥ ، ∴ ل = ٣٥ - ٢ نق

وبالتعويض من (٢) في (١) : ∴ (٣٥ - ٢ نق) نق = ١٥٠

∴ $٢ \text{ نق}^2 - ٣٥ \text{ نق} + ١٥٠ = ٠$ ، ∴ (نق - ١٥) (٢ نق - ١٠) = ٠

∴ نق = ١٥ سم ، أ ، ∴ نق = $\frac{١}{2} \times ٧٥ = ١٥$ سم وبالتعويض في (١)

∴ ل = ١٥ سم ، ∴ ل = ٢٠ سم

، ∴ $\theta = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٢٠}{١٥} = ١.٣٣$ ، ∴ $\theta = \frac{١٨٠}{\pi} \times ١.٣٣ \approx ٧٦.٦^\circ$

∴ $\theta = \frac{١٨٠}{\pi} \times ١.٣٣ \approx ٧٦.٦^\circ$ ، ∴ $\theta = \frac{١٨٠}{\pi} \times ١.٣٣ \approx ٧٦.٦^\circ$

حاول بنفسك

قطاع دائري مساحته ١٢٠ سم^٢ ، وطوله قوسه ٢٠ سم

أوجد قياس زاويته بالقياسين الدائري والستيني وأوجد محيط القطاع .

مثال ۵

دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها نصف القطرين ١٢ م ، بحيث : $\angle \text{ب} = ١٠^\circ$ سم
أوجد مساحة القطاع الأصغر م $\angle \text{ب}$ لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

نرسم \overline{AC} و \overline{AB} يقطعه في H فيكون H منتصف \overline{AB}

∴ ۱ ح = ۲ ح = ۵ سیم

$\therefore \Delta \text{ احم فيه : } \cup (\text{د احم}) = 90^\circ$

$$\frac{0}{9} = \frac{-1}{9} = (-\text{مفد}) \text{ لا} \therefore$$

$$^{\circ}112^{\circ}03' \wedge = ^{\circ}07^{\circ}47' F_E \times 2 = (-111.2) \cup \therefore$$

$$\text{مساحة القطاع الأصفر م}^2 = \frac{\text{ج}^\circ}{360} \times \pi \times \text{نق}^2 = \frac{112.531}{360} \times \pi \times 7^2 \approx 43.46 \text{ سم}^2$$

7 مثال

١- مثلث قائم الزاوية في \angle فيه : $\angle = 6^\circ$ سم ، $\angle = 8^\circ$ سم ، رسم قوس دائري مركزه \angle وطول نصف قطر دائرته يساوي \angle قطع \angle في \angle أوجد لأقرب سم \angle مساحة المنطقة المحصورة بين : \angle ، \angle ، \angle

الحل

المساحة المطلوبة = مساحة ΔABC - مساحة القطاع $AB\Gamma$

ایجاد مساحة Δ ا ب ج :

$$٢٤ \text{ سم}^2 = ٨ \times ٦ \times \frac{1}{٢} = ٢٤ \times \frac{1}{٢} = ١٢ \text{ سم}^2 \text{ مساحة } \Delta$$

إيجاد مساحة القطاع أ ب ج :

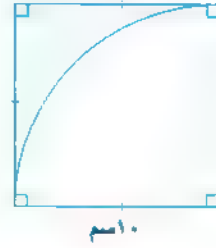
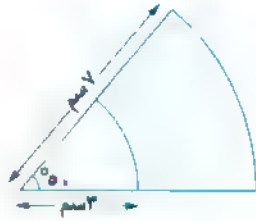
∴ نق = ا = ٦ سم ، ط ا = (د - س) = $\frac{4}{3}$ ∴ $ص = (د - س) = ٥٣ \frac{1}{3}$

∴ مساحة القطاع = $\pi \times \text{نق} \times \frac{\text{سم}}{360} = \pi \times 6 \times \frac{52.748}{360} \approx 27.17 \text{ سم}^2$

∴ المساحة المطلوبة = $17 - 24 = 7$ سم²

حاول بنفسك

أوجد مساحة الجزء المظلل في كل مما يأتي بدلالة π :

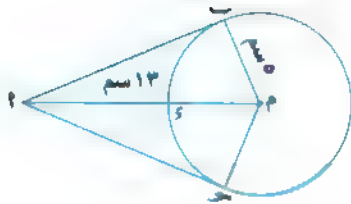


مثال ٧

١ نقطة خارج دائرة M طول نصف قطرها 5 سم ، 13 سم ، رسمت AB ، AC مماستين للدائرة في B ، C فأوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة بين : AB ، AC ، BC

الحل

مساحة المنطقة المطلوبة = مساحة الشكل ABM - مساحة القطاع M حـ ب



إيجاد مساحة الشكل ABM حـ ب :

∴ AB مماسة للدائرة ، MB نصف قطر فيها .

$$\therefore \angle (ABM) = 90^\circ$$

وبالمثل $\angle (ACM) = 90^\circ$

$$\therefore AB = AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ سم (فيثاغورث)}$$

$$\therefore \text{مساحة الشكل } ABM = 2 \times \text{مساحة } \triangle ABM = 2 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 60 \text{ سم}^2$$

إيجاد مساحة القطاع M حـ ب :

$$\text{في } \triangle M \text{ حـ ب : القائمة الزاوية في } B : \angle (BMC) = \frac{5}{13} \therefore \angle (BMC) \approx 22^\circ 22' 67''$$

$$\therefore \angle (BMC) = 2 \times 22^\circ 22' 67'' \approx 44^\circ 45' 13''$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع } M \text{ حـ ب} = \pi \times \text{نق}^2 \times \frac{\text{سن}}{360} = \frac{\pi}{360} \times 25 \times 44^\circ 45' 13'' \approx 29 \text{ سم}^2$$

$$\therefore \text{مساحة المنطقة المطلوبة} = 29 - 60 = 31 \text{ سم}^2$$



اختر نفسك

مستويات عليا

تطبيق

فهم

تذكر

من أسئلة الكتاب المدرس

تمارين
12

على القطاع الدائري

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) محيط القطاع الدائري الذي طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوي سم

(١) ١٤ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ١٠

(٢) مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٦ سم

تساوي سم^٢

(١) ٢٤ (ب) ١٢ (ج) ١٠ (د) ٨

(٣) مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه ١٠ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم تساوي سم^٢

(١) ٥٠ (ب) ٢٥ (ج) ١٢,٥ (د) ١٠٠

(٤) مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته ١,٢° وطول نصف قطر دائرته ٤ سم تساوي سم^٢

(١) ٤,٨ (ب) ٩,٦ (ج) ١٢,٨ (د) ١٩,٦

(٥) مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٢ سم تساوي سم^٢

(١) 2π (ب) 6π (ج) 9π (د) 12π

(٦) إذا كان محيط قطاع دائري ٨ سم وطول قوسه ٢ سم فإن : نق = سم

(١) ٦ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٧) القطاع الدائري الذي محيطه ٤٤ سم وطول نصف قطر دائرته ١٤ سم

فإن طول قوسه يساوي سم

(١) ١٦ (ب) ٨ (ج) ٣٢ (د) ٤

(٨) مساحة القطاع الدائري الذي محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوي سم^٢

(١) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ١٨

(٩) مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته يساوي ٤ سم ، ومحيطه ٢٠ سم

تساوي سم^٢

(١) ٤٠ (ب) ٣٢ (ج) ٢٤ (د) ٤٨

(١٠) قطاع دائري مساحته ١٥ سم^٢ وطول قوسه ٣ سم فإن : نق = سم

(١) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢,٥ (د) ١٥

(١١) قطاع دائري مساحته ٤٠٠ سم^٢ ، وطول نصف قطر دائرته ٢٠ سم فإن طول قوسه يساوي سم

- (أ) ٤٠ (ب) ٥ (ج) ٢٠ (د) ٤٠

(١٢) إذا كانت مساحة قطاع دائري تساوي ١١٠ سم^٢ وقياس زاويته ٢٢،٢°

فإن طول نصف قطر دائرته يساوي سم

- (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) طول قوس القطاع الدائري الذي مساحته ٦ π سم^٢ ، وقياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{3}$ هو سم

- (أ) ١٨ (ب) ٦ π (ج) ٦ (د) ٢ π

(١٤) محيط القطاع الدائري الذي مساحته ٢٤ سم^٢ ، طول قوسه ٨ سم يساوي سم

- (أ) ٢٠ (ب) ١٤ (ج) ٢٢ (د) ٢٤

(١٥) قطاع دائري مساحته ٤٥ سم^٢ وطول قطر دائرته ٢٠ سم ، فإن محيطه يساوي سم

- (أ) ٢٩ (ب) ١٩ (ج) ٣٩ (د) ٤٩

(١٦) مساحة قطاع دائري ٢٧ سم^٢ وطول نصف قطر دائرته ٦ سم

، فإن القياس الدائري لزاويته المركزية =°

- (أ) ١,٥ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤,٥

(١٧) قطاع دائري محيطه ٤ نق سم حيث نق طول نصف قطر دائرته ، فإن القياس الدائري لزاويته المركزية يساوي راديان.

- (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) ٨ (ج) ٢ (د) $\frac{1}{3}$

(١٨) قطاع دائري طول قوسه (ل) وقياس زاويته ١,٢° وطول نصف قطر دائرته (نق)

فإن محيطه = وحدة طول.

- (أ) ١,٢ نق (ب) ٣,٢ نق (ج) ١,٢ نق (د) ٣,٢ نق

(١٩) قياس زاوية القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته نق سم ومساحته $\frac{\pi}{3}$ نق سم^٢

يساوي°

- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ٩٠ (د) ٤٥

(٢٠) قطاع دائري محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم فإن مساحة سطح الدائرة التي تحوي هذا القطاع

تساوي سم^٢

- (أ) ٧ π (ب) ١٤ π (ج) ٤٩ π (د) ١٥٤ π

(٢١) دائرة مساحتها ٥٢,٦ سم^٢ فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة قياس زاويته ٦٧° = سم^٢

- (أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ١٣

(٢٢) دائرة مساحتها $٤٩٠ \frac{٥}{٨}$ سم^٢ فإن مساحة قطاع من هذه الدائرة طول قوسه ٣٢ سم = سم^٢

- (أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (ج) ٤٠٠ (د) ٣٠٠

(٢٣) قطاع دائري طول قوسه ٤ ل سم وطول نصف قطره ٢ سم فإن محيطه = سم

- (١) $٢ + ٢$ نق (ب) $٢ + ٢$ ل (ج) $٢ (٢ + ٢)$ (د) $٢ (٢ + ٢)$ نق

(٢٤) قطاع دائري طول قوسه (٢) وقياس زاويته (٢) وطول نصف قطره (٢)

فإن محيطه =

- (١) $٢ + ٢$ ل (ب) $٢ + ٢$ ل (ج) $٢ (٢ + ٢)$ (د) $٢ (٢ + ٢)$ نق

(٢٥) قطاع دائري محيطه ٢٥ سم ، ومساحته ٧٥ سم^٢ فإن قياس زاويته بالقياس الدائري =

- (١) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$

(٢٦) قطاع دائري مساحته (٢) زاد طول قطره إلى الضعف فإن مساحته تصبح باعتبار

أن زاويته المركزية لا تتغير.

- (١) ٢ م (ب) ٤ م (ج) $\frac{١}{٢}$ م (د) ٢ م

(٢٧) دائرة طول نصف قطرها ٢ سم وكان محيط قطاع دائري فيها $(٢ + ٨)$ سم

فإن مساحة هذا القطاع سم^٢

- (١) ٢ نق (ب) ٤ نق (ج) ٨ نق (د) ٤ نق

(٢٨) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائري إلى مساحة دائرته كنسبة $٢ : ٥$

فإن قياس زاوية القطاع =

- (١) ٣٦° (ب) ٧٢° (ج) ١٠٨° (د) ١٤٤°

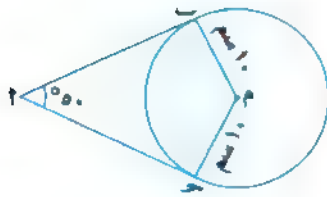
(٢٩) إذا كانت النسبة بين مساحة قطاع دائري إلى مساحة دائرته كنسبة $٢ : ٧$ وكان محيط الدائرة يساوي

٤٢ سم فإن طول قوس القطاع = سم

- (١) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ١٨

(٣٠) في الشكل المقابل :

مساحة المنطقة المظللة تساوي



- (١) $\pi \frac{٥٠}{٩}$ (ب) $\pi \frac{١٢٥}{٩}$

- (ج) $\pi \frac{٢٠٠}{٩}$ (د) $\pi \frac{٣٢٥}{٩}$

(٣١) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها $م$ ، $م$ ، $م$ هما مساحتي القطاعين المظللين

فإن : $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

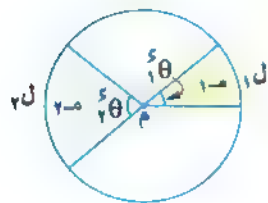
- (١) $\frac{١}{٢}$ (٢) $\frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{١}{٢}$

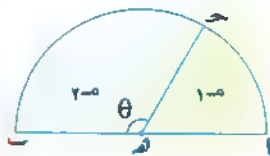
(١) فقط.

(٢) فقط.

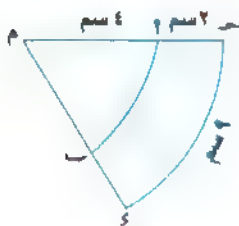
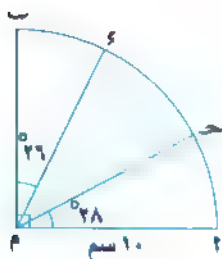
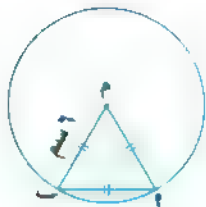
(٢) ، (٣) فقط.

(٢) ، (٣) فقط.

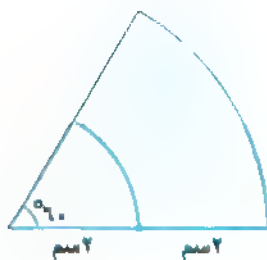




(د) ١٢٠°



(د) ١٥



(٣٣) في الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها م

إذا كان : $\frac{2}{3} = \frac{1}{m}$

فإن : $\theta = \dots$

(أ) ١٠٠° (ب) ١٠٥°

(ج) ١٠٨°

(٣٣) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(ب) $3\sqrt{18}$

(أ) ١٨

(د) $\pi \cdot 6$

(ج) $\pi \cdot 3\sqrt{9}$

(٣٤) في الشكل المقابل : مساحة القطاع المظلل = سم^٢

(ب) $\frac{225}{\pi}$

(أ) 20π

(د) $\pi \cdot 50$

(ج) $\frac{75}{\pi \cdot 2}$

(٣٥) في الشكل المقابل :

ربع دائرة مركزها م

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(ب) 20π

(أ) 10π

(د) $\pi \cdot 40$

(ج) 20π

(٣٦) في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز (م)

طولا نصف قطريهما ٤ سم ، ٦ سم

وطول $\widehat{S} = 9$ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(ج) 12π

(ب) 9π

(أ) ١٠

(٣٧) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل = سم^٢

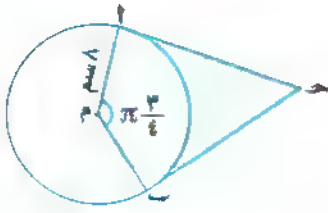
(ب) 2π

(أ) π

(د) $\pi \cdot \frac{2}{3}$

(ج) $\frac{\pi}{3}$

٢٨ في الشكل المقابل :



ح أ ، ح ب مماسان للدائرة م

، طول نصف قطر الدائرة م = ٨ سم

فإذا كان : $\angle AOB = 120^\circ$

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

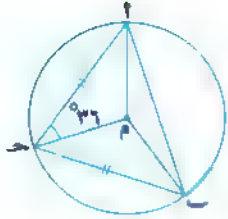
٩,٧١ (د)

٧,٩١ (ج)

٩٧,١ (ب)

٧٩,١ (١)

٢٩ في الشكل المقابل :



دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، $\angle AOB = 36^\circ$

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

$\pi ٥٠$ (د)

$\pi ٤٠$ (ج)

$\pi ٣٠$ (ب)

$\pi ٢٠$ (١)

٤٠ في الشكل المقابل :



نصف دائرة مركزها م فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

١٦,٦ (ب)

٨,٢٩ (١)

١١,٠٤ (د)

٥,٥٢ (ج)

٤١ في الشكل المقابل :



إذا كانت : $\angle POA = 45^\circ$

فإن : مساحة الجزء المظلل تساوي سم^٢

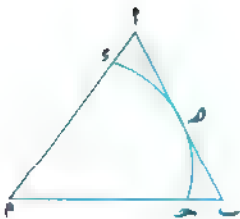
$\pi ١٦$ (ب)

$\pi ٦٤$ (١)

$\pi ٨$ (د)

$\pi ٤$ (ج)

٤٢ في الشكل المقابل :



أ مماس للدائرة م التي تمر بالنقط ح ، ع ، م

إذا كان : $AB = 6$ سم ، $BC = 11$ سم ، $AC = 12$ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

١١ (د)

١٢ (ج)

١٨ (ب)

٢٢ (١)



(د) $\pi 32$

(٤٣) في الشكل المقابل :

م مركز الدائرة ، محيط الجزء المظلل = $40,7$ سم
فإن مساحة هذا الجزء = سم²

(أ) $112,2$ (ب) $101,1$ (ج) $\pi 24$ (د) $\pi 32$

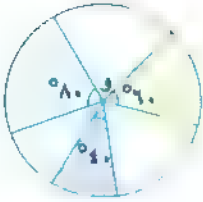


(د) 20

(٤٤) في الشكل المقابل :

قطعان دائريان في دائرة طول نصف قطرها 5 سم
، مجموع محيطيهما 30 سم فإن مجموع مساحتيهما
يساوي سم²

(أ) 35 (ب) 25 (ج) 22 (د) 20

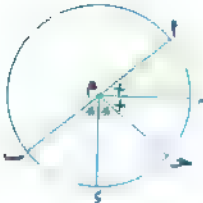


(د) 770

(٤٥) في الشكل المقابل :

دائرة طول نصف قطرها 7 سم
فإن مساحة المنطقة المظلة = سم² ($\frac{22}{7} = \pi$)

(أ) 11 (ب) 77 (ج) 527 (د) 770



(د) π

(٤٦) في الشكل المقابل :

أب قطر في دائرة م طول نصف قطرها 4 سم
، م ينصف د ب م ح ، م ح ينصف د أ م ح
فإن مساحة الجزء المظلل = سم²

(أ) $\pi 4$ (ب) $\pi 3$ (ج) $\pi 2$ (د) π



(د) $\pi \frac{3}{2}$

(٤٧) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها 3 سم ، $\widehat{AB} = 20^\circ$
، $\widehat{CD} = 30^\circ$
فإن مساحة القطاع م ب تساوي سم²

(أ) π (ب) $\pi \frac{1}{3}$ (ج) $\pi 2$ (د) $\pi \frac{3}{2}$



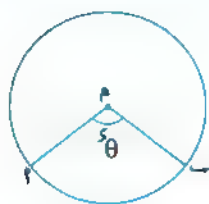
(د) $\pi 180$

(٤٨) في الشكل المقابل :

إذا كان طول \widehat{AB} : طول \widehat{AC} الأكبر = 1 : 5
فإن مساحة القطاع المظلل = سم²

(أ) $\pi 90$ (ب) $\pi 120$ (ج) $\pi 150$ (د) $\pi 180$

٤٩) في الشكل المقابل :



$$\frac{\pi r^2}{9} = \frac{\text{مساحة القطاع الأصغر}}{\text{مساحة القطاع الأكبر}}$$

$$\text{فإن } \theta = \dots\dots\dots$$

(د) $\frac{\pi r^2}{3}$

(ج) $\frac{\pi r^2}{4}$

(ب) $\frac{\pi r^2}{9}$

(أ) $\frac{\pi r^2}{9}$

٥٠) في الشكل المقابل :



$$\text{إذا كان : } 9 : 6 : 4 = \text{م ح : م ب : م ا}$$

$$\text{فإن : } \frac{\text{مساحة القطاع الأصغر م ا}}{\text{مساحة القطاع الأصغر م ح}} = \dots\dots\dots$$

(د) $\frac{16}{81}$

(ج) $\frac{4}{9}$

(ب) $\frac{2}{3}$

(أ) $\frac{1}{9}$

٥١) دائرة طول نصف قطرها نق قسمت إلى ٣ من القطاعات الدائرية المتساوية في المساحة

$$\text{فإن مساحة القطاع الواحد} = \dots\dots\dots$$

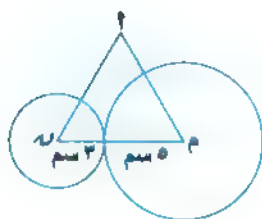
(د) $\frac{2\pi}{3}$ نق^٢

(ج) $\frac{1}{3}\pi$ نق^٢

(ب) $\frac{1}{3}$ نق^٢

(أ) $\frac{2\pi}{3}$ نق^٢

٥٢) في الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متماستان من الخارج ، المثلث ا م ن متساوي الأضلاع

$$\text{فإن مساحة الجزء المظلل} = \dots\dots\dots \text{سم}^2$$

(ب) $\pi \frac{17}{3} - 3\sqrt{3} 16$

(أ) $\pi \frac{2}{3} - 3\sqrt{3} 8$

(د) $\pi \frac{17}{3} - 3\sqrt{3} 8$

(ج) $\pi 17 - 3\sqrt{3} 11$

٥٣) إذا كانت م مساحة قطاع دائري في دائرة فإذا نقص طول نصف قطر الدائرة إلى النصف دون تغيير

زاويته المركزية فإن مساحة القطاع تنقص بمقدار المساحة الأصلية.

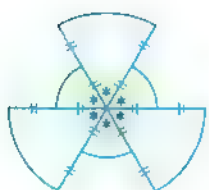
(د) $\frac{1}{8}$

(ج) $\frac{3}{4}$

(ب) $\frac{1}{4}$

(أ) $\frac{1}{9}$

٥٤) في الشكل المقابل :



٣ قطاعات دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم

و ٣ قطاعات دائرية أخرى من دائرة طول نصف قطرها ٢ نق سم

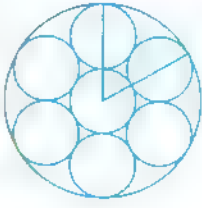
$$\text{فإن المساحة الكلية للشكل} = \dots\dots\dots \text{سم}^2$$

(د) $\pi \frac{2}{3}$ نق^٢

(ج) $\pi \frac{5}{9}$ نق^٢

(ب) $\pi 5$ نق^٢

(أ) $\pi 3$ نق^٢



٥٥) في الشكل المقابل :

٧ دوائر متطابقة ومتماسكة من الخارج

كما بالشكل طول نصف قطر كل منها نق سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

- (أ) $\frac{5}{9} \pi$ نق^٢ (ب) $\frac{7}{9} \pi$ نق^٢ (ج) $\frac{2}{9} \pi$ نق^٢ (د) $\frac{5}{9} \pi$ نق^٢

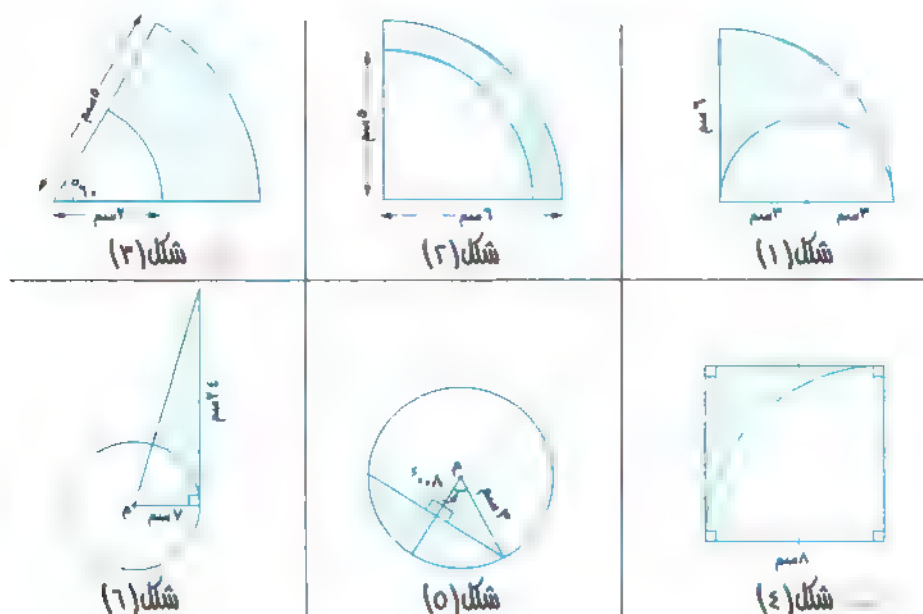
الأسئلة المقالية

ثانياً

- ١ أوجد مساحة قطاع دائري طول قوسه ١٢ سم ، وطول نصف قطره ٨ سم :٨ سم^٢
- ٢ قطاع دائري طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطره ٩ سم. أوجد مساحته. «٧٢ سم^٢»
- ٣ قطاع دائري قياس زاويته المركزية ٣٠° ، وطول نصف قطره ٣.٥ سم احسب لأقرب سم^٢ مساحة القطاع.
- ٤ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول قطره دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠° «١٠.٤ سم^٢ تقريب»
- ٥ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي قياس زاويته ٤٠° في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم لأقرب سم^٢ «١٣ سم^٢»
- ٦ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ١٠ سم وقياس زاويته ١٠٢° «٦٠ سم^٢»
- ٧ قطاع دائري طول قوسه ٧ سم ، ومحيطه ٢٥ سم أوجد مساحته. «٣١.٥ سم^٢»
- ٨ قطاع دائري محيطه ٢٨ سم ، وطول نصف قطره ٧ سم أوجد مساحته وقياس زاويته المركزية بكلا القياسين الدائري والستيني. «٤٩ سم^٢ ، ٢° ، ١١٤°»
- ٩ قطاع دائري مساحته تساوي ٢٧٠ سم^٢ وطول نصف قطره يساوي ١٥ سم أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان. «٣٦ سم ، ٢.٤°»
- ١٠ قطاع دائري مساحته ٤٠ سم^٢ ، وطول قوسه ٨ سم أوجد محيطه. «٢٨ سم»
- ١١ قطاع دائري مساحته ٢٥ سم^٢ ، وقياس زاويته المركزية ٦٠° احسب طول نصف قطره وطول قوسه. «١٠ سم ، ٥ سم»

١٢ إذا كانت مساحة قطاع دائري $\frac{2}{9}$ مساحة دائرته فأوجد قياس زاوية القطاع بالقياس الستيني والقياس الدائري. وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم فأوجد محيط القطاع لأقرب سنتيمتر. «١٤٤° ، ٢.٥١° ، ٤٥ سم»

١٣ أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل في كل شكل من الأشكال الآتية :



١٤ دائرة م طول نصف قطرها ٧.٥ سم ، رسم فيها نصف القطرين م ن ، م ب بحيث : م ب = ١٢ سم أوجد مساحة القطاع الأصغر م ب ن لأقرب سم^٢ «٥٢ سم^٢ تقريباً»

١٥ ثلاث دوائر طول نصف قطر كل منها ٥ سم ومراكزها هي رؤوس المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوائر الثلاث. «٤ سم^٢ تقريباً»

١٦ نقطة خارج دائرة م طول نصف قطرها ٦ سم ، م ن = ١٢ سم رسمت م ب ، م ج مماسين للدائرة في ب ، ج أوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة المحصورة بين المماسين ، م ج ، الأصغر. «٢٥ سم^٢ تقريباً»

١٧ م ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ $\sqrt{3}$ سم ، رسم قوس دائري مركزه م ويمس م ب ح في ب و يقطع م ب ، م ج في ن ، ص أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة المنطقة المحصورة بين م ب ح ، م ن ص ($3\sqrt{3} = ١.٧٣٢$) «٧.٧ سم^٢ تقريباً»

١٨ م ب ، م ج وتران في دائرة م بحيث : م ب = م ج = ٨ سم فإذا كان $\angle ب م ج = ٦٠^\circ$ ، فأوجد لأقرب سم^٢ مساحة القطاع الأصغر م ب ج «٢٢ سم^٢ تقريباً»

مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 19x + 13 = 0$ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها

فإن محيط القطاع الدائري المرسوم على هذا القوس = سم

- (أ) ١٩ (ب) ١٣ (ج) $\frac{19}{3}$ (د) $\frac{13}{3}$

(٢) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 13x + 19 = 0$ يساويان طول قطر دائرة وطول قوس فيها

فإن مساحة القطاع الدائري المرسوم على هذا القوس = سم^٢

- (أ) ١٩ (ب) $\frac{19}{3}$ (ج) $\frac{13}{4}$ (د) $\frac{19}{4}$

(٣) في الشكل المقابل :



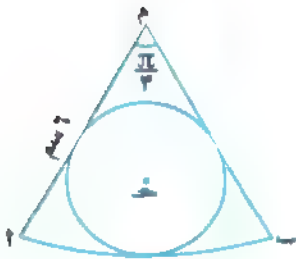
دائرتان م ، ن متباعدتان

إذا كان م ، ن هما مساحتا القطاعين

وكان $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}$ فإن $\theta = \dots$

- (أ) ٧٢ (ب) ٨٠ (ج) ٩٠ (د) ١٠٠

(٤) في الشكل المقابل :



م ٢ ب قطاع دائري من دائرة مركزها (م)

، طول نصف قطرها ٦ سم ، و (د م ب) $= \frac{\pi}{3}$

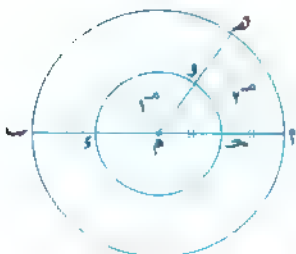
، ودائرة (ح) بداخل القطاع

تمس ٢ م ، م ب ، ب ٢

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

- (أ) π (ب) π^2 (ج) π^3 (د) π^4

(٥) في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز (م) ، م ح = ح ٢

إذا كان م ، ن هما مساحتا المنطقتين المظلتين

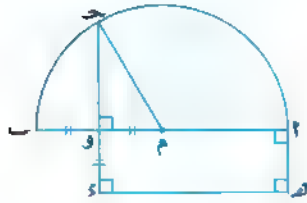
وكان : م = م

فإن و (د م ح) =

- (أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

تذكر • فهم • التطبيق • مستويات عليا

• (٦) في الشكل المقابل :



(د) $\pi 18$

(ج) $\pi 15$

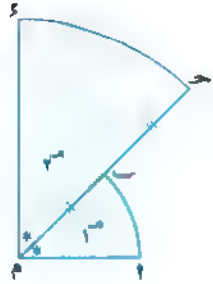
(ب) $\pi 12$

(أ) $\pi 9$

إذا كانت مساحة المستطيل $9\text{ م} \times 5\text{ م} = 27\text{ سم}^2$

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^2

• (٧) في الشكل المقابل :



(د) $\frac{1}{5}$

(ج) $\frac{1}{4}$

(ب) $\frac{1}{3}$

(أ) $\frac{1}{2}$

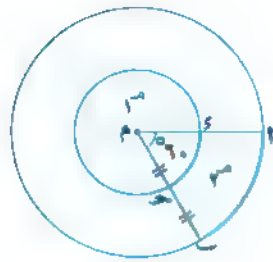
أ، ح قوسان في دائرتين متحدتي المركز م

، م ب = ب ح ، ق (د م ب) = ق (د ح م) (د ح م) (د ح م)

إذا كان : م ، م مساحتي القطاعين

فإن : $\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{م}}$

• (٨) في الشكل المقابل :



(د) 1

(ج) $\frac{4}{3}$

(ب) $\frac{5}{3}$

(أ) 2

دائرتان متحدتا المركز (م)

إذا كان : ق (د م ب) = 60° ، م ح = ح ب

وكان م ، م مساحتي المنطقتين المظلتين

فإن : $\frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{م}}$

• (٩) في الشكل المقابل :



(ب) $\pi 2 - 3\sqrt{12}$

(د) $\pi 8 - 3\sqrt{18}$

(أ) $3\sqrt{2}$

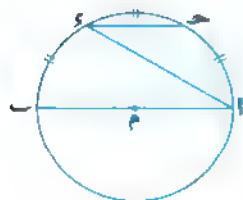
(ج) $\pi 6 - 3\sqrt{18}$

إذا كان : ح مماس لنصف دائرة (م)

وكان : ح ب = $3\sqrt{2}$ ، ح د = 6 سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^2

• (١٠) في الشكل المقابل :



(د) $\pi 10$

(ج) $\pi 8$

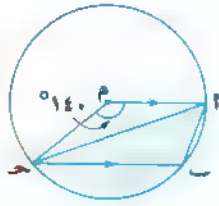
(ب) $\pi 6$

(أ) $\pi 5$

أ قطر في الدائرة م طوله 12 سم

إذا كان : ق (أ ح) = ق (ح د) = ق (د ب)

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^2



١١) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها (م) ، $\overline{AB} // \overline{CD}$ ، $\angle AEM = 140^\circ$

، طول نصف قطر الدائرة = ٦ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(د) $\pi ١٠$

(ج) $\pi ٨$

(ب) $\pi ٦$

(١) $\pi ٥$

١٢) في الشكل المقابل :

إذا كان طول القوس $\widehat{AE} = \widehat{AH}$ = طول \widehat{AC}

، $AM = ١٢$ سم ، \overline{AC} مماس للدائرة م عند A

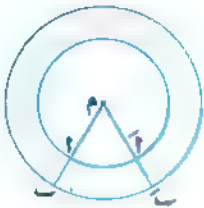
فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

(د) $\pi ٢٦$

(ج) $\pi ٢٤$

(ب) $\pi ١٨$

(١) $\pi ٦$



١٣) في الشكل المقابل :

دائرتان متحدتا المركز م طولاً نصفى قطريهما ١٢ سم

، $AM = ١٨$ سم إذا كان : $\angle AEM = 30^\circ$

فإن مساحة المنطقة المظلة = سم^٢

(د) $\pi ١٨٠$

(ج) $\pi ١٦٥$

(ب) $\pi ١٥٠$

(١) $\pi ١٢٥$

٢) \overline{AB} مثلث قائم الزاوية في B ، فيه $AB = ٤$ سم ، $BC = ٦$ سم ، رسم قوس من دائرة مركزها A ويمس \overline{BC} عند B ويقطع \overline{AC} في D فأوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع مساحة الجزء المحصور بين \overline{BC} ، \overline{CD} ، \widehat{BD}

٤ سم^٢

٣) م ، ن مركزا دائرتين متماسكتين من الخارج في A ، المستقيم \overline{BC} مماس مشترك لهما يمس الأولى في B والثانية في C فإذا كان طولاً نصفى قطري الدائرتين ٥ سم ، ١٥ سم على الترتيب فأوجد لأقرب سم^٢ مساحة المنطقة المحصورة بين المماس المشترك والدائرتين ($3\sqrt{2} = ١,٧٣٢$)

٢٩ سم^٢ تقريب



١) الربط بالزراعة : حوض زهور على شكل قطاع دائري مساحته ٤٨ م^٢ وطول قوسه ٦ م

« ٣٨ متر ، ١٦ متر »

أوجد محيطه وطول نصف قطره.

٢) قطعة من الورق على شكل مربع قطع منها ربع دائرة مركزها أحد رؤوس المربع وطول نصف قطرها يساوى طول ضلع المربع فإذا كانت مساحة الجزء الباقي من المربع ٤٨,٢٨٥ سم^٢ فأوجد طول ضلع المربع.

« ١٥ سم »

القطعة الدائرية



تمهيد

القطعة الدائرية هي جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها وتر مار بنهايتي ذلك القوس.



- فإذا رسمنا في الدائرة م الوتر \overline{AB} كما في الشكل المقابل فإن سطح الدائرة ينقسم بهذا الوتر إلى جزأين كل منهما يسمى «قطعة دائرية».
- والزاوية المركزية التي تقابل قوس القطعة تسمى زاوية القطعة فالزاوية $\angle MOB$ في الشكل هي زاوية القطعة الصغرى $\angle MOB$ بينما $\angle AOB$ هي المنعكسة هي زاوية القطعة الكبرى $\angle AOB$.
- وإذا كان \overline{OH} قطرًا عموديًا على الوتر \overline{AB} بحيث : $\overline{OH} \cap \overline{AB} = \{H\}$ فإن H يسمى ارتفاع القطعة الصغرى.

- **وبلاحظ أن** مساحة القطعة الصغرى = مساحة القطاع $\angle MOB$ - مساحة $\triangle MOB$ ،
مساحة القطعة الكبرى = مساحة القطاع $\angle AOB$ + مساحة $\triangle AOB$ ،

وعلى ذلك فإن مساحة القطعة الدائرية يتطلب حسابها إيجاد مساحة المثلث الذي قاعدته وتر القطعة ورأسه مركز الدائرة ، لذلك نمهد لمساحة القطعة بقانون يستفاد به في إيجاد مساحة المثلث.

مساحة المثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما :

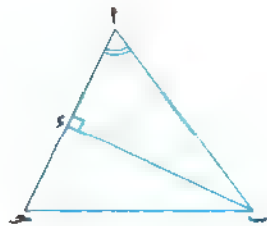
نفرض أن لدينا $\triangle ABC$ المعلوم فيه : طول AB ، طول AC ، $\angle A$ (د)

فإذا رسمنا العمود BE على AC (كما في الشكل المقابل) فإن :

$$(1) \quad \text{مساحة } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BE$$

ولكن من $\triangle ABC$ القائم الزاوية في E :

$$(2) \quad \frac{BE}{AC} = \frac{AB \sin A}{AC} \Rightarrow BE = AB \sin A$$



وبالتعويض من (٢) في (١) : \therefore مساحة Δ بـ حـ د = $\frac{1}{2} \times \text{حـ د} \times \text{بـ د} \times \sin \theta$

وهذا القانون صحيح لأي مثلث

\therefore مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه \times جيب الزاوية المحصورة بينهما.



إيجاد مساحة القطعة الدائرية

نفرض أن المطلوب إيجاد مساحة القطعة الصغرى بـ دـ بـ

من دائرة طول نصف قطرها «نق» وأن قياس الزاوية

المركزية للقطعة = θ بالقياس الدائري.

لذلك نقول : مساحة القطاع مـ بـ د = $\frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ مـ بـ د} = \frac{1}{2} \times \text{مـ ب} \times \text{بـ د} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times \text{نق} \times \text{نق} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 \sin \theta$$

\therefore مساحة القطعة بـ دـ بـ = مساحة القطاع مـ بـ د - مساحة Δ مـ بـ د

$$= \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 - \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ نق}^2 (\theta - \sin \theta)$$

\therefore مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \text{ نق}^2 (\theta - \sin \theta)$

ملاحظات

١ مساحة القطعة الكبرى بـ دـ بـ

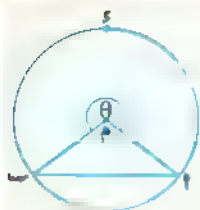
$$= \text{مساحة القطاع مـ بـ د} + \text{مساحة } \Delta \text{ مـ بـ د}$$

$$= \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 + \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ نق}^2 (\theta + \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 - \frac{1}{2} \theta \text{ نق}^2 \sin \theta \quad (\text{لأن } \theta = \theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} \text{ نق}^2 (\theta - \sin \theta)$$

٢ يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة.

٣ محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها



مثال ١

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقباس زاويتها المركزية 120°

الحل

$$\therefore \theta = 120^\circ \times \frac{\pi}{180} \approx 2.0944$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \text{ نق}^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} \times 8^2 \times (2.0944 - \sin 120^\circ) \approx 39.2 \text{ سم}^2$$

ملاحظة

في المثال السابق : يمكن استخدام القياس الدائري للزاوية المركزية في حساب مساحة القطعة بدلاً من استخدام القياس الستيني فتكون :

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times 8^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} \times 64 (2.0944 - \sin 2.0944) \approx 29.3 \text{ سم}^2$$

مع ملاحظة أنه يجب تحويل نظام الآلة من النظام (Deg) إلى النظام (Rad) قبل حساب المساحة وذلك

بالضغط على  ثم  ثم 

مثال ٢

أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وقياس زاويتها المركزية 1.02° تقريباً الناتج لرقمين عشريين.

الحل

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times \text{نق}^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} \times 10^2 (\theta - \sin \theta)$$

$$\approx 8.29 \text{ سم}^2$$

حاول بنفسك

أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها نق وقياس زاويتها المركزية θ إذا كان :

$$\boxed{1} \text{ نق} = 12 \text{ سم} , \theta = 150^\circ \quad \boxed{2} \text{ نق} = 8 \text{ سم} , \theta = 2.02^\circ$$

مثال ٣

قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٢٦.١٩ سم
أوجد مساحة هذه القطعة.

الحل

$$\therefore \theta = \frac{L}{\text{نق}} = \frac{26.19}{10} = 2.619$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة} = \frac{1}{2} \times \text{نق}^2 (\theta - \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times (10)^2 [2.619 - \sin 2.619] \approx 105.99 \text{ سم}^2$$

مثال ٤

إذا كان طول وتر قطعة دائرية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم يساوي ١٢ سم فأوجد مساحة هذه القطعة علمًا بأنها قطعة صغيرة في الدائرة.

الحل



نفرض أن \overline{AB} هو وتر القطعة ، M هو مركز الدائرة

ونرسم $\overline{MC} \perp \overline{AB}$ فتكون C منتصف \overline{AB}

أي $AC = CB = 6$ سم

ومن ΔMAC يكون : $MC = \sqrt{MA^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ سم ، ما $(AMC) = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ سم^٢

$\therefore (AMC) \approx 26.52^\circ$ $\therefore (ABC) = 2 \times 26.52^\circ = 53.04^\circ$

$\therefore \theta = 53.04^\circ \approx \frac{\pi}{180} \times 53.04^\circ$

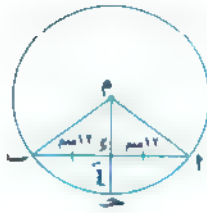
\therefore مساحة القطعة الدائرية $AB = \frac{1}{2} \times \text{نق} (\theta - \theta)$

$= \frac{1}{2} \times 100 \times (53.04^\circ - 53.04^\circ) \approx 16.35$ سم^٢

مثال ٥

أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغيرة التي طول وترها ٢٤ سم ، وارتفاعها ٦ سم

الحل



نفرض ان : \overline{AB} هو وتر القطعة في دائرة M

ونرسم $\overline{MC} \perp \overline{AB}$ يقطع \overline{AB} في C ويقطع الدائرة في D

فيكون CD هو ارتفاع القطعة

$\therefore CD = 6$ سم

$\therefore \overline{MC} \perp \overline{AB}$ ،

$\therefore AC = CB = 12$ سم

$\therefore MC = CD = 6$ سم

$\therefore MC = 6$ سم

$\therefore \Delta ACD$ فيه $\angle C = 90^\circ$

$\therefore (AMC) = (ACD) + (MCD)$

$\therefore \text{نق} = 144 + \text{نق} (6 - 6)$

$\therefore \text{نق} = 144 + \text{نق} - 36$

$\therefore 12 = \text{نق}$

$\therefore \text{نق} = 10$ سم

لاحظ ان

$$12 \times 12 = 6 \times (6 - \text{نق})$$

$$\therefore \text{نق} = 10 \text{ سم}$$

$$، \therefore \text{ما (د م ٥)} = \frac{٤٩}{٥} = \frac{١٢}{١٥} - \frac{٤}{٥}$$

$$\therefore \text{و (د م ٥)} = ٥٣ \hat{V} ٤٨^\circ$$

$$\therefore \text{و (د م ٥)} = ٢ \times ٥٣ \hat{V} ٤٨^\circ = ١٠٦ \hat{V} ٩٦^\circ$$

$$، \therefore \theta = ١٠٦ \hat{V} ٩٦^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠} = ١,٨٥$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية الصغرى} = \frac{1}{٢} \times \text{نق} (\theta - \text{ما})$$

$$= \frac{1}{٢} \times (١٠٦ \hat{V} ٩٦^\circ - ١,٨٥) = ١٠٠,١٢٥ \text{ سم}^٢$$

حاول بنفسك

أوجد مساحة قطعة دائرية ارتفاعها ٣ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم

مثال ٦

دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ٦ سم وتمر إحداهما بمركز الأخرى
أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما.

الحل



بفرض أن الدائرتين متقاطعتان في ٢ ، ب

∴ أ ب يقسم المنطقة المحصورة بين الدائرتين إلى قطعتين

متساويتين في المساحة.

$$، \therefore \Delta \text{ م ن م متساوي الأضلاع فيه : م ن = م ن = م ن = ٦ سم}$$

$$، \Delta \text{ ب م ن متساوي الأضلاع فيه : م ب = م ن = ن ب = ٦ سم}$$

$$\therefore \text{و (د م ن)} = \text{و (د ب م)} = ٦٠^\circ \therefore \text{و (د ن ب)} = \text{و (د م ن)} = ١٢٠^\circ$$

$$، \therefore \theta = ١٢٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{٢}{٣} \pi$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الصغرى أ ن ب} = \frac{1}{٢} \times \text{نق} (\theta - \text{ما})$$

$$= \frac{1}{٢} \times (١٢٠^\circ - \frac{٢}{٣} \pi) = ٢٢,١١ \text{ سم}^٢$$

$$\therefore \text{مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرتين} = ٢ \times ٢٢,١١ = ٤٤,٢٢ \text{ سم}^٢$$



اختر نفسك

مستويات عليا

تدريب

مهم

تذكر

من أسئلة الكتاب المدرسي

تمارين
13

على القطعة الدائرية

أسئلة الاختبار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية 120°

تساوى تقريباً سم^٢

(١) ٩٥ (ب) ٥١ (ج) ٨٢ (د) ٢٩

(٢) مساحة القطعة الدائرية التي طول قطر دائرتها ٨ سم وقياس زاويتها المركزية 120°

تساوى تقريباً سم^٢

(١) ٨,٥٧ (ب) ٢,١٤ (ج) ٤,٢٨ (د) ١,٠٧

(٣) مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول قوسها ٥ سم

تساوى تقريباً سم^٢

(١) ١,٠٣ (ب) ٢,٠٦ (ج) ٠,٠١ (د) ٠,٠٥

(٤) مساحة القطعة الدائرية التي قياس زاويتها 30° ، وطول نصف قطر دائرتها $2\sqrt{3}$ سم

تساوى سم^٢

(١) $2 + \frac{\pi}{3}$ (ب) $3 - \pi$ (ج) $2 + \pi$ (د) $2 - \frac{\pi}{3}$

(٥) مساحة القطعة الدائرية المرسومة في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المحيطية 60°

تساوى تقريباً سم^٢

(١) ١٨ (ب) ٥٥ (ج) ٦١ (د) ٢٧

(٦) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٨ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٨ سم لأقرب سم^٢

تساوى سم^٢

(١) ٢٩ (ب) ٢٨ (ج) ٣٠ (د) ٦٠

(٧) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل تساوى تقريباً سم^٢

(١) ٧,١ (ب) ٢٨,٥

(ج) ١٤,٣ (د) ٢,٠٢



(٨) مساحة القطعة الدائرية الكبرى التي طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها

يساوى ١٢ سم = سم^٢

(أ) ٤٣٩ (ب) ٣١٥ (ج) ١٣٧ (د) ١٣

(٩) أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم

فإن مساحة القطعة الصغرى التي وترها ب ح = سم^٢

(أ) ٣٥ (ب) ٧٢ (ج) ٤٥ (د) ٥

(١٠) القطعة الدائرية التي قياس زاويتها المركزية ٩٠° ومساحة سطحها ٥٦ سم^٢ يكون طول نصف قطر

دائرتها يساوى تقريباً سم

(أ) ٩,٩ (ب) ١٩,٨ (ج) ٧ (د) ١٤

(١١) دائرة مساحتها ٧٠٦,٥ سم^٢ فإن مساحة قطعة من هذه الدائرة قياس زاويتها المركزية ١٣٥° ($\pi = ٣,١٤$)

تساوى سم^٢ تقريباً.

(أ) ٢٦٤,٩ (ب) ١٨٥,٥ (ج) ١٢,٤ (د) ٣٤٤,٦

(١٢) مساحة القطعة الدائرية التي ارتفاعها ٥ سم وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم

تساوى تقريباً سم^٢

(أ) ٩,١ (ب) ١٢٢,٨ (ج) ١٢,٣ (د) ٦١,٤

(١٣) مساحة قطعة دائرية طول وترها ٨ سم ، ويبعد عن مركز الدائرة ٥ سم تساوى تقريباً سم^٢

(أ) ٤٨ (ب) ١٢١ (ج) ٧ (د) ٨

(١٤) مساحة قطعة دائرية طول وترها ١٦ سم ، وارتفاعها ٤ سم = سم^٢

(أ) ١٤١ (ب) ٤٥ (ج) ٧٩ (د) ١٠٧

(١٥) مساحة القطعة الدائرية تساوى مساحة القطاع الدائرى المشترك معها فى القوس إذا كان قياس زاويته

المركزية يساوى°

(أ) ٩٠ (ب) ١٨٠ (ج) ٢٧٠ (د) ٤٥

(١٦) أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب ح = ٨ سم ، ج (د ب) = ٦٠°

فإن مساحة المثلث = سم^٢

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٣١٠ (د) ٣٢٠

(١٧) فى دائرة واحدة إذا كانت القطعة الدائرية تشترك مع القطاع الدائرى فى نفس القوس فيكون لها نفس

المساحة إذا كان

(أ) ل = ٢ نق (ب) $\pi = \theta$ (ج) $\frac{\pi ٢}{٢} = \theta$ (د) ل = نق

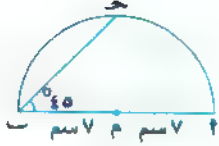
١٨) قطعة دائرية من دائرة طول نصف قطرها نق سم وطول وترها $\sqrt{2}$ نق سم

فإن مساحتها سم^٢

(أ) نق^٢ $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ (ب) $\frac{1}{4}$ نق^٢ $(2 - \pi)$

(ج) ٢ نق^٢ $(1 - \pi)$ (د) $\frac{1}{4}$ نق^٢ $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

١٩) في الشكل المقابل :



ق (د أ ب ح) = ٤٥° ، \overline{AB} قطر في الدائرة م بحيث أ ب = ١٤ سم

فإن مساحة الجزء المظلّل = سم^٢ حيث $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

(د) ٩١

(ج) ١٤

(ب) ٦٣

(أ) ٧٧

٢٠) في الشكل المقابل :



نصف دائرة م ، \overleftrightarrow{BC} مماس للدائرة م عند ب

، أ ب = ب ح = ١٢ سم فإن مساحة الجزء المظلّل = سم^٢

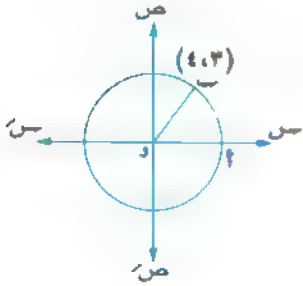
(ب) ٣,٤٢

(أ) ٢٠,٥٥

(د) ١,٤

(ج) ١٠,٢٧

٢١) في الشكل المقابل :



مساحة القطعة الدائرية الصغرى

التي وترها أ ب = وحدة مربعة.

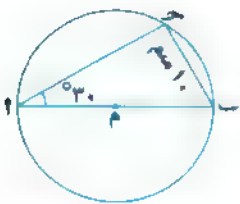
(ب) ٠,٦

(أ) ٠,٣

(د) ١,٦

(ج) ١,٣

٢٢) في الشكل المقابل :



إذا كان \overline{AB} قطر في دائرة م

فإن : مساحة الجزء المظلّل = سم^٢

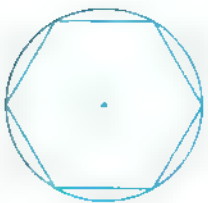
(ب) ٨

(أ) ٧

(د) ١٠

(ج) ٩

٢٣) في الشكل المقابل :



دائرة طول نصف قطرها ٦ سم تمر برؤوس سداسي منتظم

فإن مساحة الجزء المظلّل = سم^٢

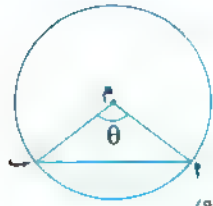
(د) ٢٢,١٥

(ج) ٢٠,٤١

(ب) ١٩,٥٧

(أ) ١٦,٢٤

٢٤ في الشكل المقابل :



دائرة طول نصف قطرها نق

فإن محيط القطعة الدائرية المظللة =

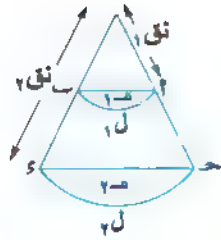
(أ) نق $(\theta + \frac{1}{2}\theta)$

(ب) نق $(\theta + \frac{1}{2}\theta)$

(ج) نق $(\theta + \frac{1}{2}\theta)$

(د) نق $(\theta + \frac{1}{2}\theta)$

٢٥ في الشكل المقابل :



إذا كان : مس مساحة القطعة الدائرية التي وترها \overline{AB}

، مس مساحة القطعة الدائرية التي وترها \overline{CD}

فإن : $\frac{مس}{مس}$ تساوى كل مما يأتى ما عدا

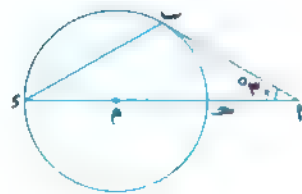
(أ) $\frac{ل}{ل}$

(ب) $\left(\frac{ل}{نق}\right)^2$

(ج) $\left(\frac{نق}{ل}\right)^2$

(د) $\left(\frac{ل}{نق}\right)^2$

٢٦ في الشكل المقابل :



\overline{AB} مماس للدائرة م ، $\angle AOB = 30^\circ$ ، $\angle AOB = 30^\circ$ سم ، $\angle AOB = 30^\circ$

فإن مساحة الجزء المظلل = سم²

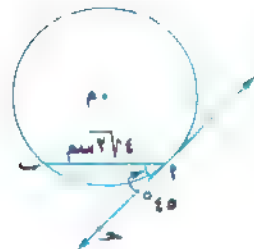
(أ) ١٨,٥٦

(ب) ١٠,٤٩

(ج) ٨,٩

(د) ٥,٥٣

٢٧ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، \overline{AB} مماس للدائرة عند أ ، $\angle AOB = 45^\circ$ ، $\angle AOB = 45^\circ$ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = سم²

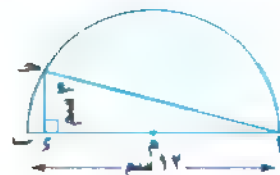
(أ) $6 - \pi$

(ب) $8 - \pi$

(ج) $4 - \pi$

(د) $6 - \pi$

٢٨ في الشكل المقابل :



نصف دائرة م طول قطرها ١٢ سم

، $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، $\overline{AB} = ٣$ سم

فإن مساحة المنطقة المظللة = سم²

(أ) $9 - \pi$

(ب) $18 - \pi$

(ج) $9 - \pi$

(د) $18 - \pi$



(٢٩) في الشكل المقابل :

حده ربع دائرة مركزها و ، \overline{AB} يمسه في هـ

فإن مساحة القطعة الدائرية المظللة = سم^٢

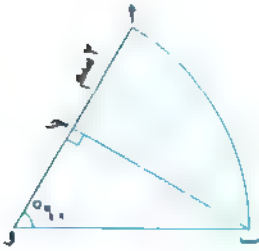
(ب) $\pi ٧٢$

(١) $\pi ٢٦$

(د) $٧٢ (\pi - ٢)$

(ج) $٢٦ (\pi - ٢)$

(٣٠) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها (و) ، $\angle \text{دو} = ٦٠^\circ$ ، $\overline{OH} = ٢$ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

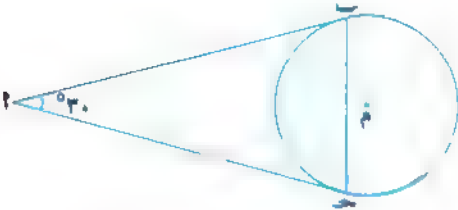
(ب) $\sqrt{٣} - \frac{\pi ٨}{٣}$

(١) $\sqrt{٣} ٢ - \pi ٤$

(د) $\sqrt{٣} - \pi ٢$

(ج) $\sqrt{٣} ٢ - \frac{\pi ٨}{٣}$

(٣١) في الشكل المقابل :



إذا كان : \overline{AB} ، \overline{AC} قطعتان مماستان للدائرة م

، قياس الزاوية بينهما ٣٠° ، $\overline{AP} = ٥$ سم

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

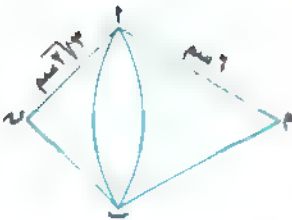
(د) $٦,٦$

(ج) $٣,٢$

(ب) $٢,٧$

(١) $١,٩$

(٣٢) في الشكل المقابل :



قطاعان دائريان من الدائرتين م ، \overline{AB} ، \overline{CD} طولاً نصفاً قطريهما ٦ سم

، $\sqrt{٣} ٢$ سم على الترتيب ، فإذا كانت مساحة القطاع م $\overline{AB} = \pi ٦$ سم^٢

، مساحة القطاع م $\overline{CD} = \pi ٤,٥$ سم^٢

فإن مساحة الشكل الرباعي م $\overline{ABCD} =$ سم^٢

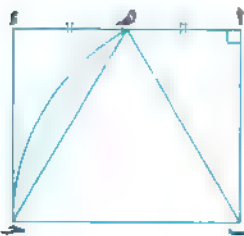
(د) $\sqrt{٣} ٩ + ٩$

(ج) $\pi \sqrt{٣} ٩$

(ب) $\sqrt{٣} ٩$

(١) $\pi ١٠,٥$

(٣٣) في الشكل المقابل :



أ ب ح د مستطيل فيه هـ منتصف \overline{AD} ، $\overline{AE} = \overline{DE} = ٦$ سم

رسمت دائرة مركزها (ب) تمر بالنقطتين هـ ، ح

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

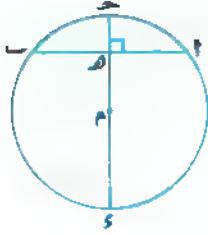
(ب) $\sqrt{٣} ٢٦ - \pi ١٨$

(١) $\sqrt{٣} ٢٦ - \pi ٩$

(د) $\sqrt{٣} ٢٦ - \pi ٣٦$

(ج) $\sqrt{٣} ٢٦ - \pi ٢٤$

• (٣٤) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها نق

إذا كان : $3 = \theta$ حـفإن مساحة المنطقة المظللة = $\frac{1}{4} \times \text{نق}^2 \times \dots\dots\dots$

(د) $\frac{1}{4} - \frac{\pi}{3}$

(ج) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$

(ب) $\frac{\pi}{4}$

(أ) $\frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$

الأسئلة المقالية

١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي :

(١) طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها يساوي 60° ،(٢) طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها يساوي 120° «٣ سم تقريباً»٢ أوجد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية 24° ، وطول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم

«٢٢٢ سم تقريباً»

٣ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ١٤ سم ، وطول قوسها ٢٢ سم. «٥٦ سم تقريباً»

٤ دائرة مساحتها $490\frac{7}{8}$ سم^٢ أوجد مساحة قطعة من هذه الدائرة طول قوسها ١٨ ، ٢٦ سم «٩٦ سم^٢»٥ أ وتر في دائرة طوله ١٠ سم يقابل زاوية مركزية قياسها 60° أوجد مساحة القطعة الكبرىالتي وترها \overline{AB} «٣٠٥ سم^٢»

٦ أوجد مساحة القطعة الدائرية التي :

(١) طول وترها ٦ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٥ سم «٤ سم^٢ تقريباً»(٢) ارتفاعها ٥ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم «٦١ سم^٢ تقريباً»٧ أوجد مساحة قطعة دائرية طول وترها = طول نصف قطر دائرتها = ٦ سم «٢٦ ٣ سم^٢ تقريباً»٨ أوجد مساحة قطعة دائرية كبرى طول وترها ١٤ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ١٠ ، ٥ سم «٣٢١ سم^٢»

٩ وتر في دائرة طوله ٨ سم على بعد ٣ سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من

تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة. «١١ سم^٢ تقريباً»



« ٢٩ سم^٢ تقريباً »

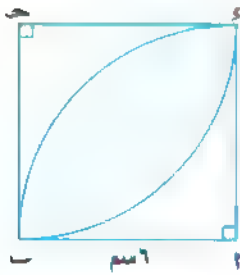
١٠ في الشكل المرسوم :

أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التي طول نصف قطرها ٨ سم ، أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة.

١١ أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة برؤوسه أوجد طول نصف قطر الدائرة ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الى وترها ب ح « ١١٨ سم^٢ »

١٢ أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة فإذا كان $\angle A = 40^\circ$ ، $\angle B = 15^\circ$ سم ، $\angle C = 18^\circ$ سم فأوجد مساحة كل من القطع الصغرى الثلاث التي أوتارها أضلاع المثلث أ ب ح « ٢٩.٣ سم^٢ ، ٢٩.٣ سم^٢ ، ٨٩.٥ سم^٢ تقريباً »

١٣ أ ب ، أ ح وتران متساويان في دائرة م طول كل منهما $2\sqrt{3}$ سم ، $\angle C = 60^\circ$ أوجد مساحة الجزء من سطح الدائرة المحصور بين الوترين والقوس الأصغر ب ح « ٦٩ سم^٢ »



« ٢١ سم^٢ تقريباً »

١٤ في الشكل المقابل :

أ ب ح د مربع طول ضلعه ٦ سم
رسم قوسان دائريان مركزاهما أ ، ح ،
وطول نصف قطر كل منهما = ٦ سم
أوجد مساحة الجزء المظلل.

١٥ دائرتان متطابقتان طول نصف قطر كل منهما ١٢ سم ، وتمر كل منهما بمركز الأخرى. أوجد مساحة المنطقة المشتركة بينهما. « ١٧٧ سم^٢ تقريباً »

١٦ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه : $\angle A = 6^\circ$ سم ، $\angle C = 8^\circ$ سم مرسوم داخل دائرة أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة كل من القطع الثلاث الصغرى التي أوتارها أضلاع المثلث. « ٤ سم^٢ ، ١١ سم^٢ ، ٢٩ سم^٢ تقريباً »



« ٢٤ سم^٢ »

١٧ في الشكل المقابل :

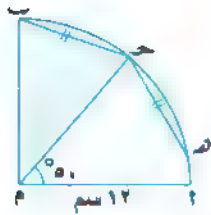
م ، ن ، هـ مراكز أنصاف دوائر
أ ب ح د = ٨ سم ، ح د ب = ٦ سم
أوجد مساحة الجزء المظلل.

- ١٨ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسم من أ القطعتان المماستان أ ب ، أ ح يمسانها في ب ، ح فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ، أ م = ١٠ سم
فأوجد مساحة القطعة الصغرى التي قوسها ب ح
- « ١٥,٣٥٥ سم^٢ »

- ١٩ دائرتان طولاً نصفى قطريهما ٦ سم ، ٨ سم ، والبعد بين مركزيهما ١٠ سم
أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين لأقرب جزء من عشرة.
- « ٢٦,٦ سم^٢ »

مسائل تقييم مهارات التفكير

- ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



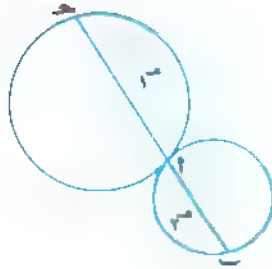
١ في الشكل المقابل :

ربع دائرة م ، ق (د أ م ح) = ٥٠° ، ح م = ح ب

فإن مساحة الجزء المظلل = سم^٢

- (١) $١٨ + \pi$ (ب) π ١٦ (ج) π ٨ + ٩ (د) π ١٢

٢ في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الخارج في أ ، إذا كان : أ ب = ٤ سم

، أ ح = ٦ سم وكانت م م ، مساحتي الجزئين المظللين

فإن : $\frac{م م}{م م} = \dots\dots\dots$

- (١) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (ج) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٢٥}$

٣ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، ق (أ ح ب) = ٣٠٠°

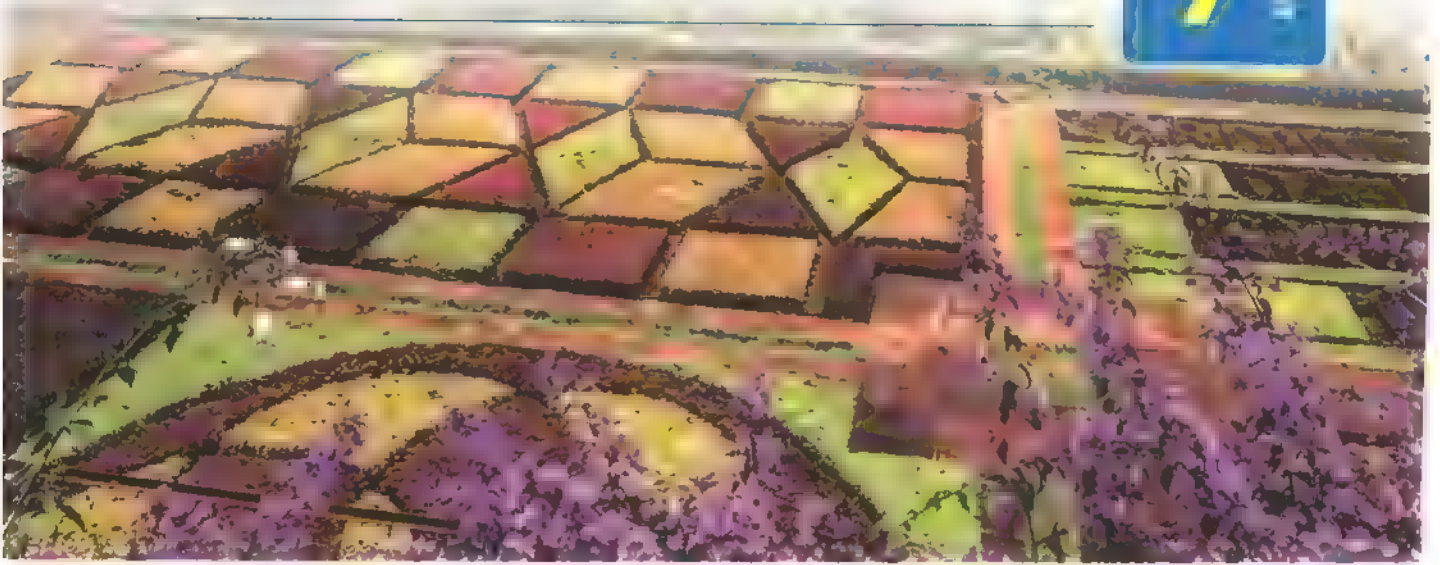
، محيط الشكل المظلل = $(٩ + \pi$ ٢) سم

فإن مساحة الشكل المظلل = سم^٢

- (١) $(\sqrt{٣} - \pi) \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $(\sqrt{٣} - \pi) \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ج) $(\sqrt{٣} - \pi) \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $(\sqrt{٣} - \pi) \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

- ٢ إذا كان وتر التقاطع لدائرتين متقاطعتين هو قطر إحداهما وطوله يساوى طول نصف قطر الدائرة الأخرى
ويساوى ١٠ سم فأوجد مساحة المنطقة المشتركة بين الدائرتين.
- « ٤٨,٣٣ سم^٢ »

المساحات



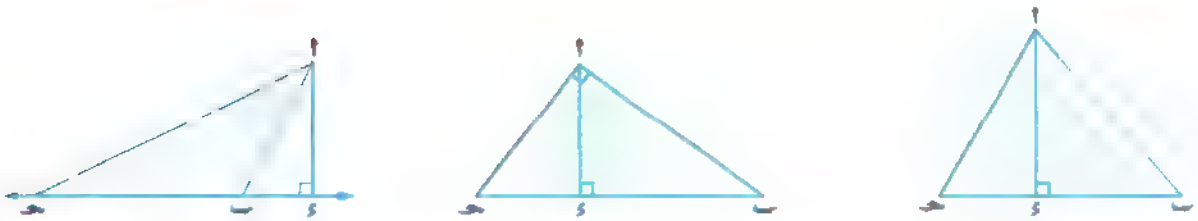
مساحة المثلث

أولاً

سبق ان درست مساحة المثلث وعلمت ان :

أولاً / مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة \times الارتفاع المناظر لها

أي أنه في أي مثلث ABC إذا كان $AE \perp BC$ فإن :



$$\text{مساحة } \triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AE$$

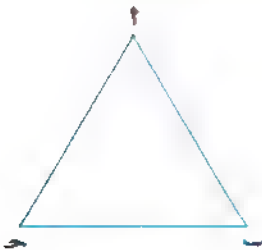
ثانياً مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه \times جيب الزاوية المحصورة بينهما

أي أنه في أي مثلث ABC

$$\text{مساحة المثلث } ABC = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

$$= \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin C$$



قاعدة هيرون لحساب مساحة المثلث

إذا رمزنا لمحيط المثلث Δ بـ $ج$ (مجموع أطوال أضلاع المثلث) بالرمز $ج$

فإن : مساحة المثلث Δ بـ $ج = \sqrt{ج(ج-أ)(ج-ب)(ج-ج)}$

مثال ١

احسب مساحة المثلث Δ بـ $ج$ في كل من الحالات الآتية :

١ Δ بـ $ج = ١٠$ سم وطول العمود المرسوم من $ب$ على $أج$ يساوي ٧ سم

٢ Δ بـ $ج = ١٢$ سم ، $بج = ١٥$ سم ، $\angle ب = ٩٠^\circ$

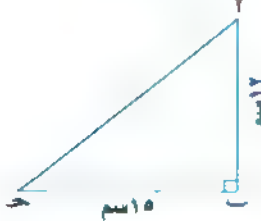
٣ Δ بـ $ج = ١١$ سم ، $بج = ١٠$ سم ، $\angle ب = ٤٧^\circ$ مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ Δ بـ $ج = ٢٥$ سم ، $بج = ١٧$ سم ، $أج = ٢٦$ سم

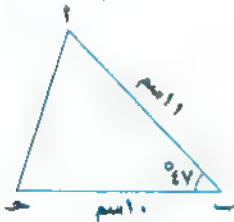
الحل



١ مساحة المثلث Δ بـ $ج = \frac{1}{2} \times بج \times أج = \frac{1}{2} \times ٧ \times ١٠ = ٣٥$ سم^٢



٢ مساحة المثلث Δ بـ $ج = \frac{1}{2} \times بج \times أج = \frac{1}{2} \times ١٢ \times ١٥ = ٩٠$ سم^٢



٣ مساحة المثلث Δ بـ $ج = \frac{1}{2} \times بج \times أج \times \sin \angle ب = \frac{1}{2} \times ١٠ \times ١١ \times \sin ٤٧^\circ \approx ٤٠,٢٢$ سم^٢

٤ Δ بـ $ج = ٢٥$ سم ، $بج = ١٧$ سم ، $أج = ٢٦$ سم

∴ مساحة Δ بـ $ج = \sqrt{٢٥(٢٥-٢٦)(٢٥-١٧)(٢٥-٢٤)} = ٢٠٤$ سم^٢

حاول بنفسك

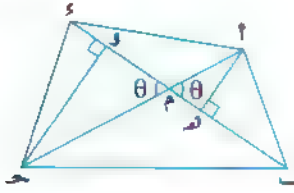
احسب مساحة المثلث Δ بـ $ج$ في كل من الحالات الآتية مقرباً الناتج لرقمين عشريين :

١ المثلث Δ بـ $ج$ متساوي الأضلاع وطول ضلعه ٦ سم.

٢ Δ بـ $ج = ١٢$ سم ، $بج = ١٥$ سم ، $\angle ب = ٦٢^\circ$

٣ Δ بـ $ج = ٦$ سم ، $بج = ٨$ سم ، $أج = ٩$ سم

في الشكل المقابل :



أ ب ح د شكل رباعي قطراه أ ب ، ب د متقاطعان في م ويحصران

بينهما زاوية قياسها θ

فإذا كان : أ م \perp ب د ، ح و \perp ب د

فإن : مساحة المضلع أ ب ح د = مساحة \triangle أ ب د + مساحة \triangle ب ح د

$$= \frac{1}{2} \text{ ب د } \times \text{ أ م} + \frac{1}{2} \text{ ب د } \times \text{ ح و} = \frac{1}{2} \text{ ب د } (\text{أ م} + \text{ح و})$$

$$\therefore \triangle \text{ أ م د فيه } \angle \text{ أ م د} = 90^\circ \quad \therefore \text{ أ م} = \frac{\text{أ د}}{\sin \theta} \quad \therefore \text{ أ م} = \frac{\text{أ د}}{\sin \theta}$$

$$\triangle \text{ ح و م فيه } \angle \text{ ح و م} = 90^\circ \quad \therefore \text{ ح و} = \frac{\text{ح د}}{\sin \theta} \quad \therefore \text{ ح و} = \frac{\text{ح د}}{\sin \theta}$$

$$\therefore \text{ مساحة المضلع أ ب ح د} = \frac{1}{2} \text{ ب د } (\text{أ م} + \text{ح و}) = \frac{1}{2} \text{ ب د } \left(\frac{\text{أ د}}{\sin \theta} + \frac{\text{ح د}}{\sin \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ب د } \times \text{ أ د} \times \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \text{ ب د } \times \text{ ح د} \times \frac{1}{\sin \theta}$$

أي أن : مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه \times جيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة

إذا استخدمنا الزاوية د أ م التي قياسها $(180^\circ - \theta)$ أى الزاوية المكمل للزاوية د أ م التي قياسها θ فإن

مساحة الشكل الرباعي أ ب ح د لا تتغير لأن : $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

مثال ٢

احسب مساحة الشكل الرباعي الذى طولوا قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما 62°

الحل

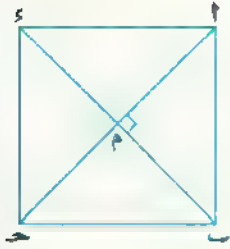
مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه \times جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 \times \sin 62^\circ \approx 52.98 \text{ سم}^2$$

ملاحظة

يمكن استخدام القانون السابق في حساب مساحات بعض الأشكال الرباعية الخاصة مثل :

١ المربع



في الشكل المقابل : $a = b$ ، $a \perp b$ ، \therefore الشكل المقابل : $a = b$ مربع

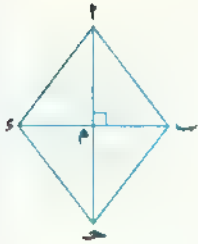
$$\therefore \text{مساحة المربع } a = b = \frac{1}{2} \times a \times b \times 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times (a) \times a = \frac{1}{2} a^2$$

$$\therefore \text{مساحة المربع} = \frac{1}{2} \times \text{مربع طول قطره}$$

$$\text{فمثلا : المربع الذي طول قطره 6 سم تكون مساحته} = \frac{1}{2} \times (6)^2 = 18 \text{ سم}^2$$

٢ المعين



في الشكل المقابل : $a = b$ ، $a \perp b$ ، \therefore الشكل المقابل : $a = b$ معين

$$\therefore \text{مساحة المعين } a = b = \frac{1}{2} \times a \times b \times 90^\circ$$

$$\therefore \text{مساحة المعين} = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب طولى قطريه}$$

$$\text{فمثلا : المعين الذي طولاه قطريه 6 سم ، 8 سم تكون مساحته} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ سم}^2$$

حاول بنفسك

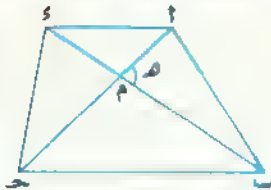
أوجد ما يأتي :

١ مساحة المربع الذي طول قطره 8 سم

٢ مساحة المعين الذي طولاه قطريه 12 سم ، 16 سم

٣ مساحة الشكل الرباعي الذي طولاه قطريه 6 سم ، 8 سم وقياس الزاوية بينهما 120°

ملاحظة



في الشكل الرباعي : $a = b$ إذا تقاطع قطراه في م

$$\text{فإن : } m(\Delta a b m) \times m(\Delta a m b) = m(\Delta a m c) \times m(\Delta c m b)$$

الإثبات

$$m(\Delta a b m) \times m(\Delta a m b) = m(\Delta a m c) \times m(\Delta c m b)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times (a) \times (b) \times \sin(180^\circ - \theta) \right]$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \times (a) \times (b) \times \sin(\theta) \right]$$

$$= m(\Delta a m c) \times m(\Delta c m b)$$

تذكر أن

• **المضلع المنتظم** : هو مضلع جميع زواياه الداخلة متساوية في القياس وجميع أضلاعه متساوية في الطول.

• قياس زاوية رأس المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n ضلعاً $= \frac{180 \times (n-2)}{n}$

فمثلاً قياس زاوية رأس المضلع السداسي المنتظم $= \frac{180 \times (6-2)}{6} = 120^\circ$

• يمكن تقسيم المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n ضلعاً إلى عدد n

من المثلثات المتساوية الساقين والمتطابقة والتي قياس زاوية رأس كل منها $= \frac{180}{n}$

فمثلاً المضلع الخماسي المنتظم ينقسم إلى 5 مثلثات متطابقة

كل منها متساوي الساقين وقياس زاوية رأسه $= \frac{180}{5} = 72^\circ$



• مساحة المضلع المنتظم :

في الشكل المقابل :

مضلع منتظم عدد أضلاعه n ضلعاً

وطول ضلعه $=$ س وحدة طول.

فإن : مساحة المضلع $=$ مساحة $\triangle م أ ب \times n$

$\therefore \triangle م أ ب$ متساوي الساقين فيه : $م أ = م ب = ٢ م$ ، $ق (د أ م) = \frac{180}{n}$

، $\therefore \overline{م أ} \perp \overline{م ب}$ ، $\therefore ق (د أ م) = \frac{180}{n}$

، \therefore طنا $(د أ م) = \frac{٢ م}{٢} = م$ ، \therefore طنا $\frac{٢ م}{٢} = \frac{180}{n} \times \frac{٢ م}{٢}$ ، \therefore طنا $\frac{٢ م}{٢} = \frac{180}{n} \times \frac{٢ م}{٢}$

، \therefore مساحة $\triangle م أ ب = \frac{1}{2} \times$ طول القاعدة \times الارتفاع $= \frac{1}{2} \times ٢ م \times م$

$= \frac{1}{2} \times ٢ م \times م = م^2$

\therefore مساحة المضلع $= (م^2 \times \frac{180}{n}) \times n = \frac{180}{n} \times م^2 \times n$

أي أن : مساحة المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n ضلعاً وطول ضلعه $=$ س طنا $\frac{180}{n} \times س^2 \times n$

مثال ٣

أوجد مساحة كل من :

١) شكل ثماني منتظم طول ضلعه ٧ سم (الأقرب رقمين عشريين)

٢) مضلع منتظم عدد أضلاعه $= ١٢$ ضلعاً وطول ضلعه $= ١٠$ سم (الأقرب سنتيمتر مربع)

٣) مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $= ٩$ سم (الأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

الحل

- ١ مساحة المضلع الثماني المنتظم $= \frac{1}{2} \times ٨ \times ٢٧ \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \times ٢٧ = ٢٣٦,٥٩$ سم^٢
 - ٢ مساحة المضلع الذي عدد أضلاعه ١٢ ضلعاً $= \frac{1}{2} \times ١٢ \times ١٠ \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \times ١٠ = ١١٢,٠$ سم^٢
 - ٣ مساحة المثلث المتساوي الأضلاع $= \frac{1}{2} \times ٣ \times ٢٩ \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \times ٢٩ = ٣٥,٠٧٤$ سم^٢
- حل آخر:** مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب طولى ضلعين \times جيب الزاوية المحصورة بينهما
- $$= \frac{1}{2} \times ٩ \times ٩ \times \sin ٦٠^\circ \approx ٣٥,٠٧٤ \text{ سم}^2$$

ملاحظات

المثلث المتساوي الأضلاع هو مضلع ثلاثي منتظم ولذلك يمكن استخدام قانون حساب مساحة المضلع المنتظم في إيجاد مساحته كما في المثال السابق ويكون :

$$\begin{aligned} \text{مساحة المثلث المتساوي الأضلاع} &= \frac{1}{2} \times ٣ \times ٢٧ \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3}{2} \times ٢٧ \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \times ٣ \end{aligned}$$

أي أن مساحة المثلث المتساوي الأضلاع $= \frac{27\sqrt{3}}{4} \times ٣$ حيث ٣ طول ضلع المثلث

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مساحة السداسي المنتظم :

$$\begin{aligned} \text{مساحة السداسي المنتظم} &= \frac{1}{2} \times ٦ \times ٢٧ \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3}{2} \times ٢٧ \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \times ٣ \end{aligned}$$

أي أن مساحة السداسي المنتظم $= \frac{27\sqrt{3}}{4} \times ٣$ حيث ٣ طول ضلعه

حاول بنفسك

استخدم قانون حساب مساحة المضلع المنتظم في إيجاد مساحة كل من :

- ١ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٥ سم (مقرّباً الناتج لرقمين عشريين)
- ٢ مربع طول ضلعه ٦ سم
- ٣ مضلع خماسي منتظم طول ضلعه ١٢ سم (مقرّباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية)



اعتبر نفسك

مستويات عليا

تطبيق

فهم

تذكر

من أسئلة الكتاب المدرسي

تمارين

14

على المساحات

أسئلة الاختيار من متعدد

أولا

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة المثلث ABC الذي فيه : $AB = 7$ سم ، $BC = 8$ سم ، $C = 50^\circ$

تساوى سم²

(١) ٢١,٤ (ب) ٤٢,٩ (ج) ١٨ (د) ٢٣,٤

(٢) مساحة المثلث المتساوي الساقين الذي طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس زاوية رأسه 60°

تساوى سم²

(١) ٢٥ (ب) $25\sqrt{3}$ (ج) $25\sqrt{2}$ (د) ٥٠

(٣) مساحة المثلث المتساوي الساقين الذي طول قاعدته ٦ سم ، طول أحد ساقيه ٥ سم تساوى سم²

(١) ١٥ (ب) ١٢ (ج) ١٠ (د) ٢٠

(٤) مساحة المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ٦ سم تساوى سم²

(١) ١٨ (ب) $18\sqrt{3}$ (ج) ٩ (د) $9\sqrt{3}$

(٥) مساحة الشكل الرباعي الذي طول قطريه ٦ سم ، ٨ سم وقياس الزاوية بينهما 30° تساوى سم²

(١) ١٢ (ب) ٢٤ (ج) $12\sqrt{3}$ (د) $24\sqrt{3}$

(٦) الشكل الرباعي الذي طول قطريه ١٠ سم ، ١٢ سم ومساحته تساوى ٣٠ سم² يكون قياس الزاوية

الحادة بين قطريه

(١) 30° (ب) 60° (ج) 150° (د) 45°

(٧) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذي طول ضلعه ٤ سم تساوى سم²

(١) $12\sqrt{3}$ (ب) ١٢ (ج) $24\sqrt{3}$ (د) ٢٤

(٨) مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذي طول ضلعه ١٠ سم = سم²

(١) ١٧٢,٠٥ (ب) ٩٠,٨٢ (ج) ٦٨٨,١٩ (د) ١٣٧,٦٤

(٩) المعين الذي قياس إحدى زواياه 50° وطول ضلعه ٦ سم تكون مساحته سم²

(١) ١٣,٧٩ (ب) ١١٠,٣١ (ج) ٢٧,٦ (د) ١١,٥٧

(١٠) مساحة المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه $\frac{1}{4}$ سم تساوى سم²

(١) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ (ج) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ (د) $\frac{1}{4}$

(١١) مساحة المربع الذي طول قطره من سم تساوى سم

- (أ) $\frac{1}{2}$ سم (ب) $\frac{1}{4}$ سم (ج) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ سم (د) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ سم

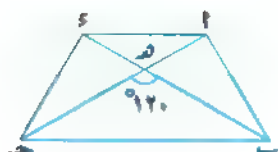
(١٢) مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه من سم تساوى سم

- (أ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ سم (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ سم (ج) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ سم (د) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ سم

(١٣) مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه من سم تساوى سم

- (أ) $2\sqrt{2}$ سم (ب) $2\sqrt{2}$ سم (ج) $8\sqrt{2}$ سم (د) $2\sqrt{2}$ سم

(١٤) فى الشكل المقابل :



أ ب ح د شكل رباعى فيه : $\angle AEB = 90^\circ$ سم

، مساحة الشكل أ ب ح د = $24\sqrt{3}$ سم

فإن : أ ب ح د = سم

- (أ) ١٦ (ب) ١٤ (ج) ١٥ (د) ١٦

(١٥) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه $2\sqrt{3}$ ، $3\sqrt{3}$ ، $5\sqrt{3}$ سم تساوى سم

- (أ) $6\sqrt{3}$ (ب) $6\sqrt{3}$ (ج) $30\sqrt{3}$ (د) $30\sqrt{3}$

(١٦) مثلث حاد الزوايا مساحته $14,4$ سم ، طولاه ضلعين فيه 6 سم ، 8 سم فإن جيب تمام الزاوية

المحصورة بين هذين الضلعين يساوى

- (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{1}{4}$

(١٧) مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه 4 سم ، 6 سم ، 8 سم = سم

- (أ) $173,9$ (ب) $11,6$ (ج) $13,9$ (د) $41,6$

(١٨) أ ب ح د مثلث حاد الزوايا مساحته $40,12$ سم ، فإذا كان : أ ب = 9 سم ، ب ح = 12 سم

فإن : ح د = (أقرب درجة)

- (أ) ٣٢ (ب) ٤٢ (ج) ٤٨ (د) ٨٨

(١٩) طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته $36\sqrt{3}$ سم يساوى سم

- (أ) $6\sqrt{3}$ (ب) ٢٤ (ج) ٦ (د) ١٢

(٢٠) فى الشكل المقابل :



أ ب ح د متوازى أضلاع

مساحته = سم

- (أ) ١٦ (ب) ٢٠ (ج) ٢٤ (د) ٣٦

(٢١) مساحة الشكل الرباعي الذي طول قطريه ١٢ سم ، ١٢ سم ، ويحصران زاوية جيب تمامها $\frac{5}{13}$ تساوى سم^٢

- (١) ٣٠ (ب) ٧٢ (ج) ٦٠ (د) ١٤٤

(٢٢) إذا كانت مساحة شكل سداسى منتظم ٥٤ $\sqrt{3}$ سم^٢ ، فإن طول ضلعه يساوى سم.

- (١) ٦ (ب) ١٢ (ج) $2\sqrt{3}$ (د) $3\sqrt{3}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :



ح قطر فى دائرة م ، ح - ٦ سم ، $\angle ABC = \theta$

فإن : مساحة $\triangle ABC =$ سم^٢

- (١) ٦ ح (ب) ٦ ط (ج) ١٨ ط (د) ١٨ ط

(٢٤) فى الشكل المقابل :

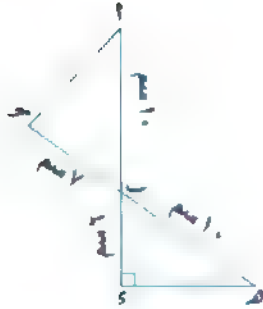


إذا كان طول العمود المرسوم من مركز سداسى منتظم

على أحد أضلاعه يساوى ٦ سم فإن مساحة السداسى تساوى

- (١) $27\sqrt{3}$ سم^٢ (ب) $36\sqrt{3}$ سم^٢ (ج) $54\sqrt{3}$ سم^٢ (د) $72\sqrt{3}$ سم^٢

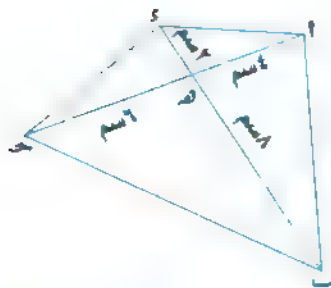
(٢٥) فى الشكل المقابل :



مساحة $\triangle ABC$ تساوى سم^٢

- (١) ٢٤ (ب) ٢٨ (ج) ٣٢ (د) ٣٥

(٢٦) فى الشكل المقابل :

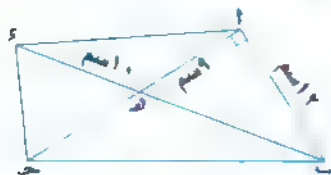


إذا كانت مساحة الشكل $ABC = 50$ سم^٢

فإن : $\angle ABC =$

- (١) 30° (ب) 60° (ج) 75° (د) 90°

(٢٧) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة الشكل $ABC = 190$ سم^٢

فإن : طول $BC =$ سم

- (١) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١١ (د) ١٢

(٢٨) في ΔABC : إذا رمزنا لنصف محيط المثلث بالرمز C وكان $C - AB = 6$ سم ،

$C - AC = 8$ سم ، $C - BC = 10$ سم فإن مساحة $\Delta ABC =$ سم²

- (١) $30\sqrt{2}$ (ب) $5\sqrt{2}$ (ج) $30\sqrt{4}$ (د) $5\sqrt{48}$

(٢٩) مضلع منتظم طول ضلعه ٦ سم وقياس الزاوية الخارجة عن أحد رؤوسه تساوي ٣٦°

فإن مساحته = سم²

- (١) ٢٧٧ (ب) ٢٢٤ (ج) ٢١٨ (د) ١٩٦

(٣٠) ABC مثلث فيه $AB = 8$ سم وكان طول المتوسط $AD = 4$ سم فإن أكبر مساحة للمثلث ABC

تساوي سم²

- (١) ٢٢ (ب) ١٦ (ج) $3\sqrt{12}$ (د) $3\sqrt{6}$

(٣١) مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه ٦ سم فإن مساحته سم²

- (١) $3\sqrt{12}$ (ب) $3\sqrt{16}$ (ج) $2\sqrt{16}$ (د) $2\sqrt{18}$

(٣٢) إذا كان L هو ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع فإن مساحته = سم²

- (١) $L \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (ب) $L \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (ج) $L \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (د) $L \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(٣٣) مثلث محيطه ١٥٠ سم والنسبة بين أطوال أضلاعه ٥ : ١٢ : ١٣ فإن مساحته = سم²

- (١) ٢٥٠ (ب) ٢٧٥ (ج) ٥٠٠ (د) ٧٥٠

(٣٤) أي المثلثات الآتية يمكن إيجاد مساحته ؟

(١) مثلث متساوي الساقين محيطه = ٣٠ سم (ب) مثلث قائم الزاوية محيطه = ٣٠ سم

(ج) مثلث متساوي الأضلاع محيطه = ٣٠ سم (د) مثلث قائم الزاوية طول وتره = ٣٠ سم

(٣٥) إذا كان قطرا الشكل الرباعي متعامدان فإن مساحته =

(١) حاصل ضرب طول قطريه. (ب) $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طول قطريه.

(ج) حاصل ضرب أطوال أضلاعه. (د) $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أطوال أضلاعه.

(٣٦) إذا كان S هو محيط المثلث ABC

فإن : $\frac{1}{2}S = (S - AC) + (S - AB) + (S - BC) =$

(١) مساحة ΔABC (ب) ٢ مساحة ΔABC

(ج) ٣ مساحة ΔABC (د) ٤ مساحة ΔABC

(٣٧) مساحة المعين الذي طول ضلعه L سم وقياس إحدى زواياه الداخلة θ تساوي سم²

- (١) L^2 (ب) $L^2 \sin \theta$ (ج) $L^2 \cos \theta$ (د) $L^2 \sin \theta$

(٣٨) Δ ABC مثلث فيه : $AB = 4$ سم ، $BC = 8$ سم ، $AC = 6$ سم ، E متوسط

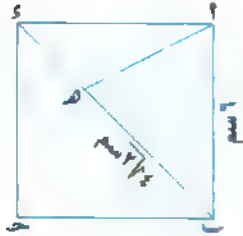
فإن مساحة $\Delta ABE = \dots$ سم²

(أ) $\frac{10\sqrt{3}}{2}$

(ب) $10\sqrt{2}$

(ج) $10\sqrt{3}$

(د) $\frac{10\sqrt{5}}{2}$



(٣٩) في الشكل المقابل :

Δ ABC مربع طول ضلعه 6 سم ، $M \in BC$ بحيث $BM = 4\sqrt{2}$ سم

فإن مساحة $\Delta ABM = \dots$ سم²

(أ) 12

(ب) 24

(ج) $12\sqrt{2}$

(د) $24\sqrt{2}$

(٤٠) في الشكل المقابل :

Δ ABC وتران متقاطعان في M ، $AM = 7\sqrt{2}$ سم

، $MB = 8$ سم ، $\widehat{B} = 60^\circ$ ، $\widehat{A} = 30^\circ$

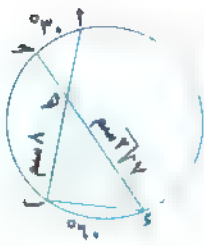
فإن : مساحة $\Delta BMC = \dots$ سم²

(أ) $28\sqrt{2}$

(ب) 28

(ج) $16\sqrt{2}$

(د) 16



(٤١) في الشكل المقابل :

Δ ABC مربع ، E ح BC مثلث متساوي الأضلاع

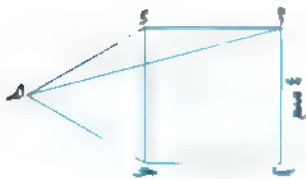
فإن مساحة $\Delta ABE = \dots$ سم²

(أ) 16

(ب) 8

(ج) 4

(د) $4\sqrt{3}$



(٤٢) في الشكل المقابل :

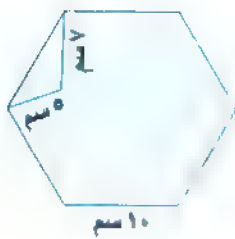
شكل سداسي منتظم فإن مساحة المنطقة المظلة = \dots سم²

(أ) 241,6

(ب) 246,1

(ج) 243,6

(د) 248,3



(٤٣) في الشكل المقابل :

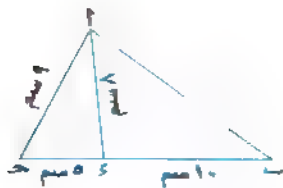
مساحة $\Delta ABC = \dots$ سم²

(أ) $16\sqrt{6}$

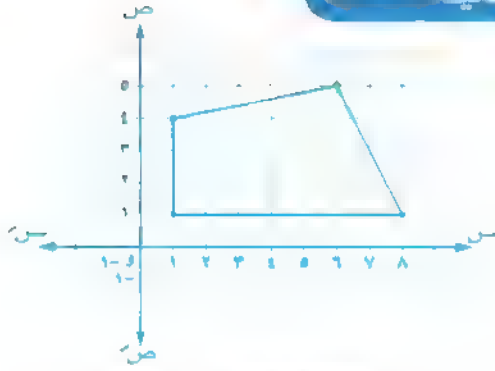
(ب) $11\sqrt{12}$

(ج) $11\sqrt{18}$

(د) $11\sqrt{36}$



الأسئلة المشابهة



١ أوجد مساحة الشكل المقابل :

٢ أوجد مساحة المثلث ABC في كل من الحالات الآتية :

- (١) $AB = 6$ سم ، $BC = 8$ سم ، $\angle C = 90^\circ$ « ٢٤ سم^٢ »
 (٢) $AC = 12$ سم وطول العمود المرسوم من C على AB يساوي ٧ سم « ٤٢ سم^٢ »
 (٣) $AB = 16$ سم ، $BC = 20$ سم ، $\angle C = 46^\circ$ « ١١٥٠ سم^٢ تقريباً »
 (٤) $AB = 8$ سم ، $BC = 7$ سم ، $AC = 11$ سم « ٢٨ سم^٢ تقريباً »

٣ أوجد مساحة المثلث ABC الذي فيه : $BC = 16$ سم ، $AB = 22$ سم ، $\angle C = 63^\circ$ مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. « ١٥٦.٨١٧ سم^٢ »

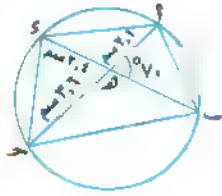
٤ أوجد لأقرب رقم عشري واحد مساحة مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه ١٢ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما 64° « ٦٤.٧ سم^٢ »

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعي الذي طولاً قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما 68° مقرباً الناتج لأقرب سنتيمتر مربع. « ٨٩ سم^٢ »

٦ أوجد مساحة الشكل $ABCD$ في كل من الحالات الآتية :

- (١) متوازي أضلاع فيه : $AB = 8$ سم ، $BC = 11$ سم ، $\angle C = 60^\circ$ « ٣٧.٤٤ سم^٢ »
 (٢) شبه منحرف طولاً قاعدتيه المتوازيتين 5 ، 9 ، BC يساوي ٧ سم ، ١١ سم على الترتيب وطول العمود المرسوم من D على BC يساوي ٦ سم. « ٥٤ سم^٢ »
 (٣) معين فيه $AB = 8$ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه يساوي 58° « ٥٥ سم^٢ »

٧ $ABCD$ متوازي أضلاع طولاً قطريه AC ، BD هما ١٦ سم ، ٢٤ سم على الترتيب فإذا كانت مساحته ١٩٢ سم^٢ فأوجد : $\angle D$ (٤ م) « ٩٠ »



« ١٥ سم^٢ تقريباً »

٨ في الشكل المقابل :

أ ب ح د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{H\}$
 فإذا كان $AH = ١$ سم ، $HD = ٣$ سم ، $HB = ٢$ سم ، $HC = ٤$ سم ،
 ن (د أ ه ب) = ٧٠° فاحسب مساحة الشكل الرباعي أ ب ح د

٩ أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية (مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة) :

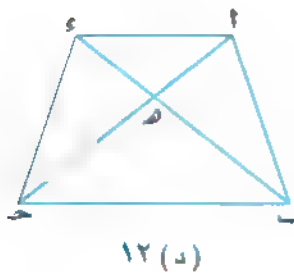
- (١) \square خماسي منتظم طول ضلعه = ١٦ سم
 (٢) \square سداسي منتظم طول ضلعه = ١٢ سم
 (٣) ثماني منتظم طول ضلعه = ٨ سم
 (٤) سباعي منتظم طول ضلعه = ١٠ سم
- « ٤٤٠.٤ سم^٢ »
 « ٣٧٤.١ سم^٢ »
 « ٣٠٩ سم^٢ »
 « ٣٦٣.٤ سم^٢ »

١٠ أوجد لأقرب رقم عشري واحد مساحة شكل منتظم ذو ١٢ ضلعاً وطول ضلعه ١٠ سم ١١٩٩ سم^٢

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) مثلث أ ب ح محيطه = ١٤ سم ومساحته = $٢\sqrt{١٤}$ سم^٢ وطول أحد أضلاعه ٣ سم
 فإن الفرق بين طولي الضلعين الآخرين =
 (١) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٧ (د) ١١
- (٢) سداسي منتظم مساحته (م_١) مرسوم داخل دائرة مساحتها (م_٢) فإن م_١ : م_٢ =
 (١) $\pi : ٣\sqrt{٣}$ (ب) $٢\pi : ٣\sqrt{٣}$ (ج) $\pi : ٢\sqrt{٣}$ (د) $٢\pi : ٣\sqrt{٣}$
- (٣) مضلعان منتظمان مرسومان داخل نفس الدائرة ، أحدهما مكون من ٦ أضلاع مساحته (م_١) والآخر مكون من ١٢ ضلعاً مساحته (م_٢) فإن م_١ : م_٢ =
 (١) $\sqrt{٣} : ١$ (ب) ٢ : ١ (ج) $\sqrt{٣} : ٢$ (د) $٢ : \sqrt{٣}$
- (٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب ح د شكل رباعي فيه : $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{H\}$
 ، مساحة $\triangle AHD = ٩$ سم^٢ ، مساحة $\triangle BHD = ١٨$ سم^٢
 ، مساحة $\triangle CHD = ١٦$ سم^٢
 فإن مساحة $\triangle AHC =$ سم^٢
 (١) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١٢

• (٥) إذا كان $\triangle ABC$ مثلثاً منتظماً طول ضلعه l سم وطول $\overline{AD} = m$ سم

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\triangle ABC)}{\text{مساحة } (\triangle ABD)} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{l}{m}$ (ب) $\frac{m}{l}$ (ج) $\frac{l^2}{m^2}$ (د) $\frac{m^2}{l^2}$

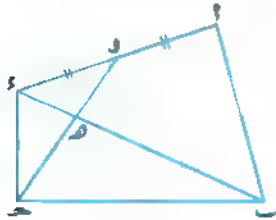
• (٦) $\triangle ABC$ شكل رباعي فيه $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ إذا كانت مساحة $(\triangle ADC) = m$ سم^٢

، مساحة $(\triangle ABD) = (2 - m)$ سم^٢ ، مساحة $(\triangle BCD) = (m + 10)$ سم^٢

، مساحة $(\triangle ABC) = (m + 16)$ سم^٢ فإن مساحة الشكل $\triangle ABC = \dots\dots\dots$ سم^٢

(أ) ٨ (ب) ٣٢ (ج) ٥٦ (د) ٨٨

٢ في الشكل المقابل :



٥٦ سم^٢

إذا كانت مساحة $(\triangle ABE) = 24$ سم^٢ ، مساحة $(\triangle AED) = ٨$ سم^٢

، مساحة $(\triangle BCD) = ٢٤$ سم^٢

وكانت \overline{AC} و \overline{BD} متتصفتين أوجد مساحة الشكل $\triangle ABC$

ثانياً

المقدمة التحليلية

المتجهات.

الخط المستقيم.

4 الوحدة

5 الوحدة



الوحدة

4

المتجهات

دروس الوحدة

الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة.

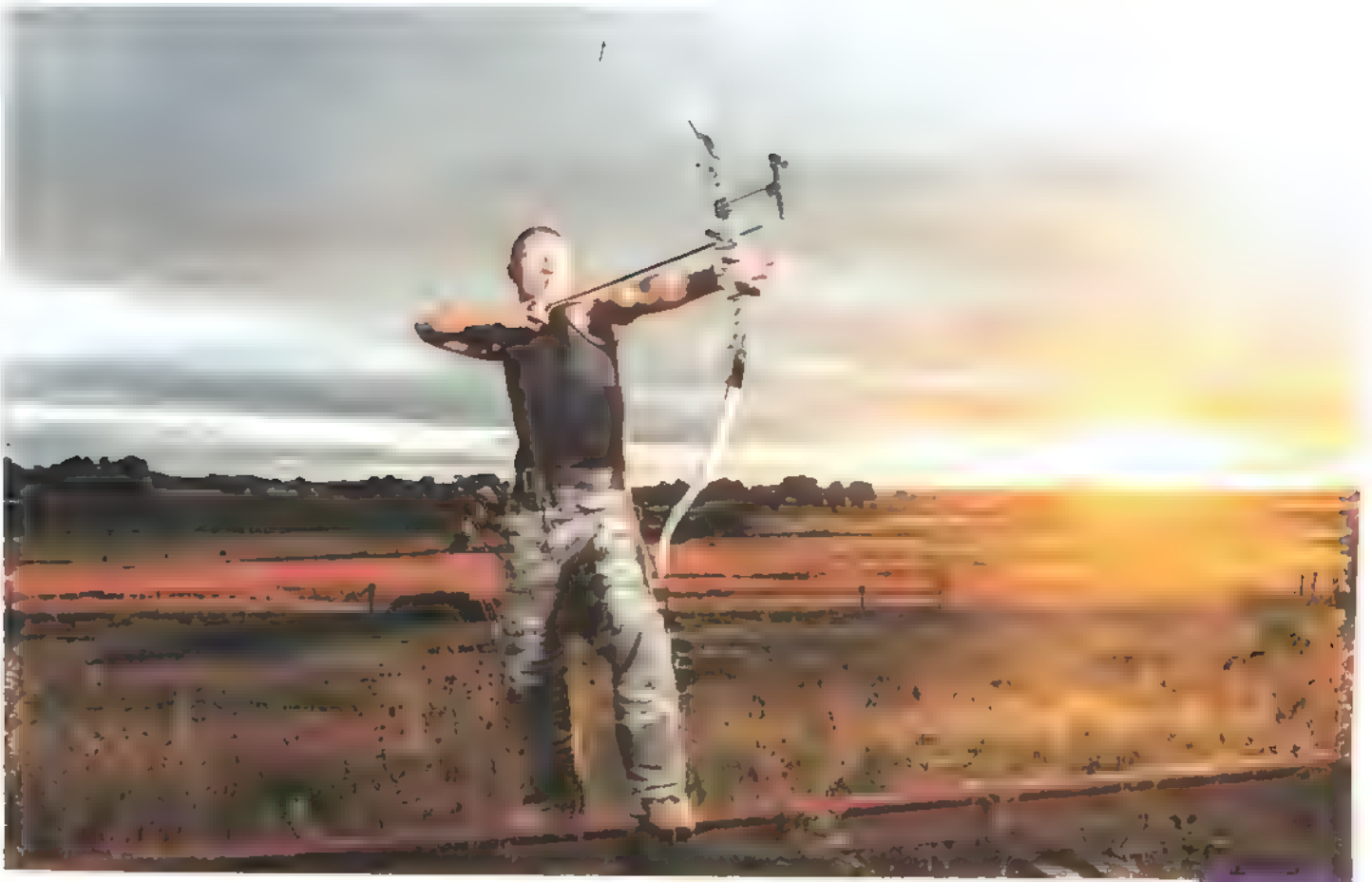
1

المتجهات.

2

المتجهات على المستوى.

3



نواتج التعلم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتعرف متجه الوحدة ويعبر عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.
- يتعرف توازى متجهين وتعامد متجهين.
- يضرب متجهاً فى عدد حقيقى.
- يجمع متجهين باستخدام قاعدة المثلث (الإحداثيات - طريقة متوازى الأضلاع) - يطرح متجهين.
- يتعرف الكمية القياسية والكمية المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة ، ويعبر عنها بدلالة طرفيها فى مستوى الإحداثيات.
- يتعرف متجه الموضع ويضعه فى الصورة القطبية.
- يوجد معيار المتجه ، والمتجه الصفري.
- يتعرف ويحل تمارين على تكافؤ متجهين.

الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

1



الكميات القياسية والكميات المتجهة

* تنقسم الكميات التي نتعامل معها في حياتنا إلى نوعين :

١ الكمية القياسية : هي كمية تتعين تماماً بعدد حقيقي هو مقدار هذه الكمية.

ومن أمثلتها : الطول - الكتلة - الزمن - درجة الحرارة - الحجم - المسافة.

٢ الكمية المتجهة : هي كمية تتعين بعدد حقيقي هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

ومن أمثلتها : القوة - الإزاحة - متجه السرعة.

ولتوضيح الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة نوضح على سبيل المثال الفرق بين المسافة
كمية قياسية والإزاحة ككمية متجهة :

١ المسافة : هي طول المسار الفعلي المقطوع أثناء الحركة من موضع إلى آخر.

وهي كمية قياسية لأنها تتعين تماماً بمقدارها فقط وليس لها اتجاه.

٢ الإزاحة : هي أقصر بُعد بين نقطة البداية ونقطة النهاية ، وفي اتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية ،
أي أنها مسافة بين النقطتين في اتجاه معين.

وهي كمية متجهة لأنها تتعين تماماً بمقدارها بالإضافة إلى اتجاهها.

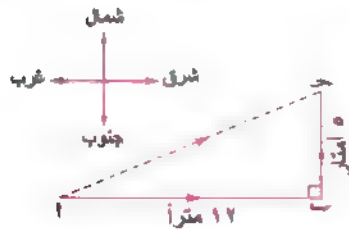
فمثلاً في الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة (أ) مسافة ١٢ متراً شرقاً ثم غير

اتجاهه وسار مسافة ٥ أمتار شمالاً ثم توقف عند النقطة (ح).

فإن : المسافة التي قطعها الجسم أثناء الحركة = أ + ب + ج = ١٢ + ٥ = ١٧ متراً

وتكون : الإزاحة الحادثة خلال الحركة هي طول أ ح وفي الاتجاه من أ إلى ح



أي أن الإزاحة = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2} = ١٣$ متراً في اتجاه أ ح



كل شعاع في المستوى يعين اتجاهًا معينًا.

فمثلًا في الشكل المقابل :

- \vec{a} يحدد اتجاه الشرق.
- \vec{b} يحدد اتجاه الشمال الشرقي.
- \vec{c} يحدد اتجاه 30° شمال الغرب.
- \vec{d} يحدد اتجاه 35° شرق الجنوب.

لاحظ أنه في الشكل المقابل :



إذا كان : \vec{a} ، \vec{b} متوازيين وكل منهما لا يوازي \vec{c} ص

$$\vec{a} \parallel \vec{b} , \vec{b} \parallel \vec{c} , \vec{a} \parallel \vec{c}$$

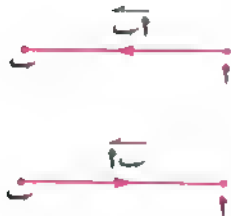
فإن : • \vec{a} ، \vec{b} لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد.

- \vec{a} ، \vec{b} لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- \vec{a} ، \vec{b} في اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيم واحد.
- \vec{a} ، \vec{b} في اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيمان متوازيان.
- \vec{a} ، \vec{b} مختلفان في الاتجاه ويحملهما مستقيمان غير متوازيين.

وبصفة عامة :

- * الشعاعان المتحدان في الاتجاه أو المتضادان في الاتجاه يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.
- * الشعاعان المختلفان في الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان.

القطعة المستقيمة الموجهة



- إذا حددنا للقطعة المستقيمة \vec{a} نقطة بداية a ونقطة نهاية b فإنه يترتب على ذلك أن يصبح للقطعة المستقيمة اتجاه من a إلى b وتسمى قطعة مستقيمة موجهة ويرمز لها بالرمز \vec{a} مع ملاحظة أن : $\vec{a} \neq \vec{b}$ لاختلافهما في نقطتي البداية والنهاية مما يؤدي إلى تضادهما في الاتجاه.

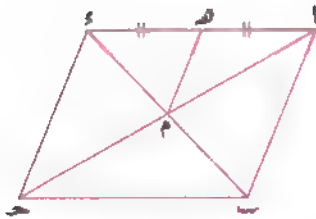
• مما سبق نرى أن القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد بثلاثة عناصر هي :

- 1 نقطة البداية.
- 2 نقطة النهاية.
- 3 الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

تعريف

- 1 القطعة المستقيمة الموجهة : هي قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه.
- 2 معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار \vec{AB}) : هو طول \vec{AB} ويرمز له بالرمز $\|\vec{AB}\|$
ولاحظ ان $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\| = \|\vec{AB}\|$
- 3 تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين : تكافؤ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان :
(1) لهما نفس الطول (المعيار).
(2) لهما نفس الاتجاه.

مثال 1



في الشكل المقابل :

\vec{AB} جزء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في M ، M منتصف \vec{EF}

أولاً : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (ان وجدت) والتي تكافئ :

| | | |
|--------------|--------------|--------------|
| \vec{AB} 1 | \vec{EF} 2 | \vec{AC} 3 |
| \vec{BA} 4 | \vec{FE} 5 | \vec{MA} 6 |

ثانياً : بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

| | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| \vec{AB} ، \vec{MA} 1 | \vec{EF} ، \vec{CB} 2 | \vec{AC} ، \vec{MA} 3 |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|

الحل

| | | | |
|---------|--------------|--------------|--------------|
| أولاً : | \vec{AB} 1 | \vec{EF} 2 | \vec{AC} 3 |
| | \vec{BA} 4 | \vec{FE} 5 | 6 لا يوجد. |

ثانياً : 1 لأن $\|\vec{AB}\| \neq \|\vec{MA}\|$ 2 لأن \vec{EF} ، \vec{CB} متضادتان في الاتجاه.

3 لأن \vec{AC} ، \vec{MA} متضادتان في الاتجاه.

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

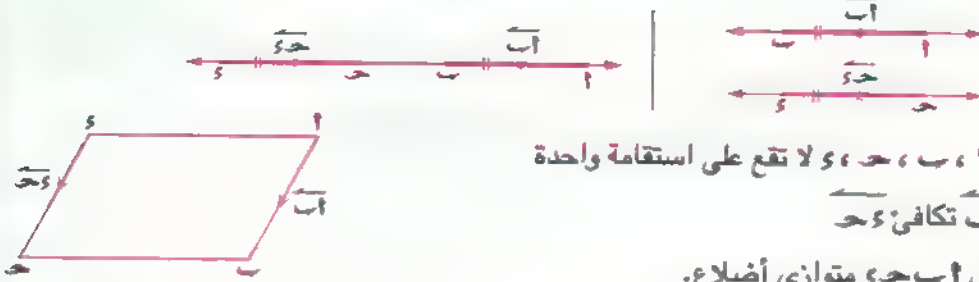
إذا كانت : $\vec{AB} \cap \vec{CD} = \{M\}$ ، $AM = CM$ ، $BM = DM$

فأكمل ما يأتي بوضع «تكافئ» أو «لا تكافئ» مع ذكر السبب :

| | |
|--|--|
| 1 \vec{AM} \vec{CM} لأنهما | 2 \vec{BM} \vec{DM} لأنهما |
| 3 \vec{AB} \vec{CD} لأنهما | 4 \vec{AB} \vec{CD} لأنهما |

ملاحظات

١ \vec{AB} ، \vec{CD} لا يمكن أن تتكافئا إلا إذا كان يحملهما مستقيمان متوازيان أو مستقيم واحد كما بالشكلين الآتيين :



٢ إذا كانت : \vec{AB} ، \vec{CD} ، \vec{E} لا تقع على استقامة واحدة

وكانت : \vec{AB} تكافئ \vec{CD}

فإن : الشكل \vec{AB} \vec{CD} متوازي أضلاع.

٣ من نقطة في المستوى ولتكن \vec{CD} لا يمكن رسم

إلا قطعة مستقيمة موجهة وحيدة \vec{CD}

تكافئ قطعة مستقيمة أخرى \vec{AB} في نفس المستوى.

٤ يوجد عدد لا نهائي من القطع المستقيمة الموجهة التي يمكن رسمها في المستوى وكل منها تكافئ قطعة مستقيمة موجهة أخرى.

مثال ٢

في مستوى إحداثي متعامد عيّن النقط : $\vec{A}(-2, 1)$ ، $\vec{B}(3, 1)$ ، $\vec{C}(2, 2)$ ، $\vec{D}(1, -1)$

ثم ارسم \vec{CD} ، \vec{DL} كل منهما تكافئ \vec{AB} ، أوجد إحداثيي كل من : \vec{H} ، \vec{L}

الحل

لرسم \vec{CD} تكافئ \vec{AB} يجب أن تكون \vec{CD} ، \vec{AB}

لهما نفس الاتجاه ونفس المعيار.

* نرسم $\vec{CD} // \vec{AB}$ (ميل \vec{CD} = ميل $\vec{AB} = \frac{2}{3}$)

* نحدد طول \vec{CD} = طول \vec{AB} باستخدام الفرجار

أو بحساب عدد المربعات الأفقية والرأسية فنجد أن : $\vec{H} = (4, 5)$

* وبالمثل : نرسم \vec{DL} نجد أن : $\vec{L} = (1, 4)$

حل آخر : ∴ الانتقال يحافظ على التوازي وأطوال القطع المستقيمة.

∴ النقطه \vec{H} هي صورة \vec{A} بالانتقال $[(1, -1) - (2, 2)] = (1, 4)$

ولرسم \vec{CD} تكافئ \vec{AB} نجد أن \vec{CD} هي صورة \vec{AB} بالانتقال $(1, 4)$

∴ النقطه \vec{H} هي صورة النقطه \vec{B} بالانتقال $(1, 4)$ ∴ النقطه $\vec{H} = (1 + 3, 4 + 1) = (4, 5)$

وبالمثل يمكن إيجاد إحداثيي النقطه \vec{L}

على الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • التطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أي مما يأتي يمثل كمية متجهة ؟

(أ) الزمن. (ب) درجة الحرارة. (ج) الإزاحة. (د) الكتلة.

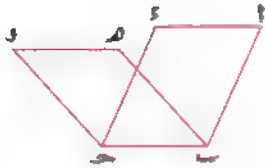
(٢) إذا كان : \vec{AB} متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م فإن :

أولاً : \vec{AB} تكافئ

(أ) \vec{BA} (ب) \vec{AB} (ج) \vec{CA} (د) \vec{DA}

ثانياً : \vec{AM} تكافئ

(أ) \vec{AM} (ب) \vec{BM} (ج) \vec{CM} (د) \vec{DM}



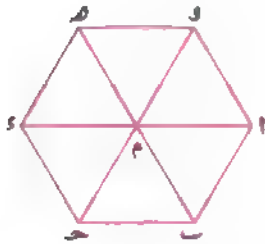
(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : \vec{AB} و \vec{CD} متوازيين أضلاع

فإن : \vec{AC} تكافئ كلاً من

(أ) \vec{AB} ، \vec{CD} (ب) \vec{BC} ، \vec{AD}

(ج) \vec{AC} ، \vec{BD} (د) \vec{AB} ، \vec{CD}



(٤) في الشكل المقابل :

\vec{AB} و \vec{DE} سداسي منتظم ، مركزه النقطة م فإن :

أولاً : \vec{AB} تكافئ كلاً من القطع المستقيمة الموجهة الآتية

ما عدا

(أ) \vec{DE} (ب) \vec{BC} (ج) \vec{AC} (د) \vec{AD}

ثانياً : \vec{AM} تكافئ

(أ) \vec{AM} (ب) \vec{BM} (ج) \vec{DM} (د) \vec{CM}

(٥) \vec{AB} و \vec{CD} مربع تقاطع قطراه في م ، فإن أزواج القطع المستقيمة الموجهة الآتية متكافئة

ما عدا

(أ) \vec{AB} ، \vec{CD} (ب) \vec{AC} ، \vec{BD} (ج) \vec{BC} ، \vec{AD} (د) \vec{AM} ، \vec{DM}

(٦) إذا كان \vec{AB} حركه و شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى (ن) أى من القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة ؟

- (١) \vec{AB} ، \vec{BC} (ب) \vec{AB} ، \vec{DE} (ج) \vec{AB} ، \vec{CD} (د) \vec{AB} ، \vec{EF}

(٧) إذا كان : $\vec{AB} = \vec{AC}$ فإن :

- (١) \vec{B} منتصف \vec{AC} (ب) \vec{C} منتصف \vec{AB}
(ج) \vec{B} تنطبق على \vec{C} (د) \vec{A} تنطبق على \vec{C}

(٨) إذا كان \vec{AB} منتصف \vec{AC} فماى مما يأتى يكون صحيح ؟

- (١) $\vec{AB} = \vec{BC}$ (٢) $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\|$ (٣) $\vec{AB} = \vec{CB}$

- (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط. (ج) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : \vec{AM} ، \vec{BM} نصفى قطرين فى دائرة (م)

فماى مما يأتى صحيح ؟

- (١) $\vec{AM} = \vec{BM}$ (٢) $\|\vec{AM}\| = \|\vec{BM}\|$ (٣) $\vec{AM} = \vec{CM}$

- (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (ج) (١) ، (٢) فقط. (د) (٢) ، (٣) فقط.

(١٠) إذا تحرك جسم من نقطة A إلى نقطة B فإن المسافة التى قطعها تكون

- (١) $\|\vec{AB}\|$ (ب) أقل من $\|\vec{AB}\|$

- (ج) أكبر من أو يساوى $\|\vec{AB}\|$ (د) \vec{AB}

(١١) إذا تحرك جسم من نقطة A إلى نقطة B ثم إلى نقطة C فإن :

- (١) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\|\vec{AC}\|$

- (ب) المسافة التى قطعها الجسم تساوى $\vec{AB} + \vec{BC}$

- (ج) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى $\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$

- (د) الإزاحة التى قطعها الجسم تساوى \vec{AC}

(١٢) فى الشكل المقابل :



إذا تحرك جسم من النقطة A شرقاً إلى النقطة C

ثم عاد غرباً إلى النقطة B فإن :

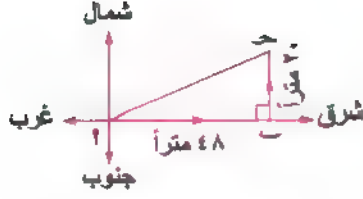
أولاً : المسافة التى قطعها الجسم = سم.

- (١) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ٢١

ثانيًا: الإزاحة الحادثة =

- (أ) ٩ سم في اتجاه \vec{AB}
(ب) ٦ سم في اتجاه \vec{CB}
(ج) ٩ سم في اتجاه \vec{CA}
(د) ٢١ سم في اتجاه \vec{CA}

١٣) في الشكل المقابل :



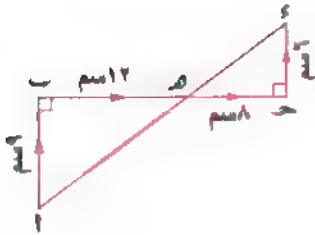
إذا تحرك جسم من النقطة أ مسافة ٤٨ مترًا شرقًا ثم غير اتجاهه وسار مسافة ٢٠ مترًا شمالًا ثم توقف عند النقطة ب فإن :
أولًا: المسافة التي قطعها الجسم = مترًا

- (أ) ٥٢ (ب) ٦٨ (ج) ٤٨ (د) ٢٨

ثانيًا: الإزاحة الحادثة =

- (أ) ٦٨ متر في اتجاه \vec{AB}
(ب) ٦٨ متر في اتجاه \vec{CB}
(ج) ٥٢ متر في اتجاه \vec{CA}
(د) ٥٢ متر في اتجاه \vec{CB}

١٤) في الشكل المقابل :



إذا كانت كل من : \vec{AB} عمودية على \vec{BC} ، وإذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب ثم ح وتوقف عند النقطة د فإن :

أولًا: المسافة التي قطعها الجسم = سم

- (أ) ٢٥ (ب) ٣٥ (ج) ٢٩ (د) ٢٠

ثانيًا: الإزاحة الحادثة =

- (أ) ٣٥ سم في اتجاه \vec{AD}
(ب) ٣٥ سم في اتجاه \vec{CD}
(ج) ٢٥ سم في اتجاه \vec{AD}
(د) ٢٥ سم في اتجاه \vec{CD}

١٥) في الشكل المقابل :



أ ب ح د ه و شكل سداسي منتظم طول ضلعه ٨ أمتار

، إذا تحرك جسم من النقطة أ إلى النقطة ب

ثم ح ثم د ثم ه وتوقف عند النقطة و فإن :

أولًا: المسافة التي قطعها الجسم = متر.

- (أ) ٨ (ب) ٤٨ (ج) ٣٢ (د) ٤٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة =

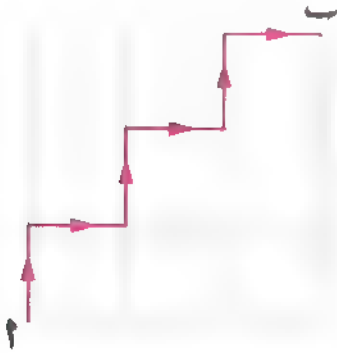
- (أ) ٨ متر في اتجاه \overrightarrow{OA} (ب) ٤٠ متر في اتجاه \overrightarrow{OA}
(ج) ٨ متر في اتجاه \overrightarrow{AO} (د) ٤٠ متر في اتجاه \overrightarrow{AO}

١٦) سيارة قطعت ٢٠ متر في اتجاه الشمال ثم قطعت نفس المسافة في اتجاه الغرب فإن إزاحة السيارة هي

- (أ) ٤٠ متر في اتجاه الغرب. (ب) ٤٠ متر في اتجاه الشمال الغربي.
(ج) $20\sqrt{2}$ متر في اتجاه الشمال الغربي. (د) $20\sqrt{2}$ متر في اتجاه الجنوب الغربي.
(١٧) في المستوى الإحداثي المتعامد إذا كانت : ١ (٢ ، ١) ، ٢ (١ ، ٣) ، ٣ (١ ، ٠) ، ٤ (٠ ، ٤) وكان : ١ \overrightarrow{AB} يكافئ \overrightarrow{CD} فإن \overrightarrow{CD} =

- (١) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (ج) (٣ ، ١) (د) (٤ ، ٢) (٢) (٤ ، ٢) (ب) (٢ ، ٤) (ج) (١ ، ٣) (د) (٢ ، ٤)

(١٨) في الشكل المقابل :



حديقة مربعة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع تم عمل مسارات مستقيمة للترجل بها حتى لا تؤذي النباتات فقسمت تلك المسارات الحديقة إلى ٩ مربعات متطابقة كما بالشكل فإذا تحرك شخص من نقطة أ إلى ب متخذًا المسار الموضح بالشكل فإن :
أولًا : المسافة المقطوعة = متر.

- (١) ٣٠ (ب) ٥٠ (ج) ٦٠ (د) ٩٠

ثانيًا : الإزاحة الحادثة =

- (أ) ٦٠ متر في اتجاه \overrightarrow{AB} (ب) ٢٠ متر في اتجاه \overrightarrow{AB}
(ج) $20\sqrt{2}$ متر في اتجاه \overrightarrow{AB} (د) ٦٠ متر في اتجاه \overrightarrow{BA}

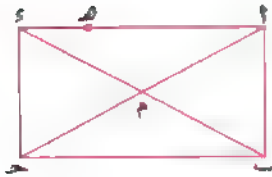
(١٩) في الشكل المقابل :



تحرك رجل من نقطة أ إلى نقطة ب ثم تحرك على مسار دائري طول نصف قطره ٧ متر فإن أقصى معيار إزاحة للرجل = متر.

- (١) ١١ (ب) ٢٠ (ج) ٣٥ (د) ٥٠

السلامة العامة



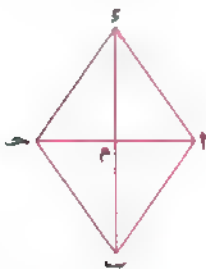
١ في الشكل المقابل :

۱- بحری مستطیل تقاطع قطراه فی م، م، م، م، م

بَيْنَ مَا إِذَا كَانَ الشَّعَاعَانِ فِي كُلِّ مَا يَأْتِي مُتَّحِدِينَ فِي الْإِتِّجَاهِ

أو متضادين في الاتجاه أو مختلفي الاتجاه :

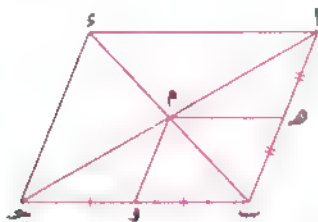
| | | |
|--|--|--|
| $\overleftarrow{أ}، \overleftarrow{أ} (٣)$ $\overleftarrow{س}، \overleftarrow{س} (٦)$ | $\overleftarrow{س}، \overleftarrow{أ} (٤)$ $\overleftarrow{س}، \overleftarrow{س} (٥)$ | $\overleftarrow{أ}، \overleftarrow{أ} (١)$ $\overleftarrow{س}، \overleftarrow{س} (٤)$ |
|--|--|--|



٢ في الشكل المقابل :

أحد معين فيه : $\overline{a} \cap \overline{b} = \{m\}$

اكتب القطع المستقيمة الموجهة والتي تكافئ كلاً مما يأتي :

$$\begin{array}{c|c} \overleftarrow{sp}(r) & \overleftarrow{sp}(1) \\ \overleftarrow{pw}(z) & \overleftarrow{sp}(r) \end{array}$$


٣ في الشكل المقابل :

ا ب ح د متوازی اضلاع فيه : $\overline{ا ح} \cap \overline{ب د} = \{م\}$

، لہ منتصف آب ، و منتصف بحر

أولاً : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ :

| | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\overline{54}(2)$ | $\overline{45}(2)$ | $\overline{56}(1)$ |
| $\overline{65}(6)$ | $\overline{64}(5)$ | $\overline{46}(4)$ |

ثانيًا : بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

| | |
|--------|--------|
| ١٢، ١٣ | ١١، ١٢ |
| ١٤، ١٥ | ١٣، ١٤ |



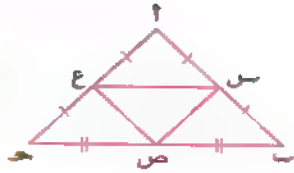
٤ في الشكل المقابل :

باب ح مثلث فيه : من منتصف أب

ل منتصف آخر ، حسن ص غ ل مستطيل

كتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ كلاً مما يأتي :

| | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| (۱) $\overline{س ص}$ | (۲) $\overline{س ل}$ | (۳) $\overline{ل ا}$ |
| (۴) $\overline{س هـ}$ | (۵) $\overline{هـ ص}$ | |



٥ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : $\overline{AB} = \overline{AC}$ ح

، س ، ص ، ع منتصفات أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب.

أولاً : أي العبارات التالية صحيحة :

(١) $\|\overline{CS}\| = \|\overline{ES}\|$ ، (٢) \overline{CS} تكافئ \overline{ES} ، (٣) \overline{CS} تكافئ \overline{ES}

ثانياً : اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ كلاً من :

(١) \overline{CS} ، (٢) \overline{ES} ، (٣) \overline{CS} ، (٤) \overline{CS} ، (٥) \overline{CS} ، (٦) \overline{ES}

٦ في مستوى إحداثي متعامد : إذا كانت أ (٢ ، ٢) ، ب (٢ ، -١) ، ح (٥ ، -١)

(١) ارسم ح د تكافئ أ ب وعين إحداثي النقطة د

(٢) عين إحداثي النقطة م منتصف ب ح ثم حدد القطع المستقيمة الموجهة التي تكافئ :

(١) \overline{AB} ، (ب) \overline{AC} ، (ج) \overline{AD} ، (د) \overline{DB}

(٣) هل الشكل أ ح د ب متوازي أضلاع ؟ فسر إجابتك.

٧ في مستوى إحداثي متعامد : إذا كانت أ (٤ ، -٢) ، ب (٤ ، ٤) ، ح (-٢ ، ٣) وكانت كل من

القطع المستقيمة الموجهة ب أ ، ح د ، و م ، د ه متكافئة حيث ونقطة الأصل. أوجد إحداثي كل من : م ، ه ، د

٨ في مستوى إحداثي متعامد :

إذا كانت أ (٣ ، -٢) ، ب (٦ ، ٢) ، ح (١ ، ٢) ، د (٤ ، ٧)

(١) أوجد : $\|\overline{AB}\|$ ، $\|\overline{CD}\|$ ، $\|\overline{AD}\|$

(٢) أثبت أن : أ ب تكافئ ح د

(٣) إذا كانت القطع المستقيمة الموجهة ب ح ، ح د ، د ه ، و م متكافئة.

أوجد إحداثي كل من : م ، ه ، د حيث ونقطة الأصل.

٩ أنشئ نظاماً للإحداثيات المتعامدة في المستوى حيث (و) نقطة الأصل وعين عليه النقط :

أ (-٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٠) ، ح (٢ ، -٣) ، د (-١ ، ١) ، ه (٤ ، ١) ، ز (١ ، ٤)

ثم ارسم القطع المستقيمة الموجهة : ح د ، و ه ، د ل ، ل ط كل منها تكافئ أ ب

وعين من الرسم إحداثيات : ه ، ل ، ط

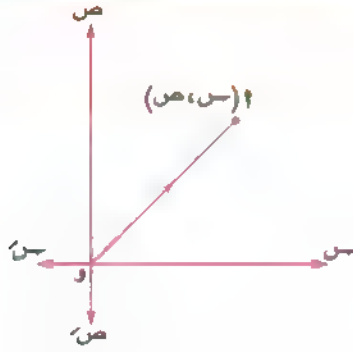
المتجهات

2



متجه الموضع

نعلم أن كل نقطة A في المستوى الإحداثي المتعامد تُعين بزوج مرتب وحيد $(س، ص)$ وذلك يكون لها موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و يتحدد بالقطعة المستقيمة الموجهة \vec{OA} التي تُسمى متجه الموضع لنقطة A ويكتب: $\vec{OA} = (س، ص)$



تعريف

متجه الموضع لنقطة معلومة A بالنسبة لنقطة الأصل O :

هو القطعة المستقيمة الموجهة \vec{OA} التي بدايتها نقطة الأصل O ونهايتها النقطة المعلومة A

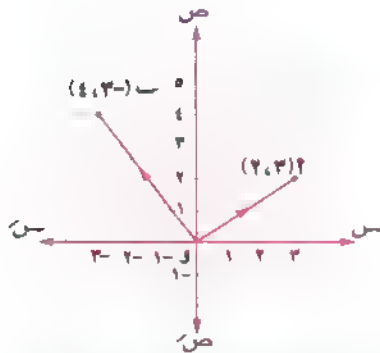
فمثلاً في الشكل المقابل

* \vec{OA} هو متجه الموضع لنقطة A بالنسبة لنقطة الأصل O

ويكتب: $\vec{OA} = (٢، ٣)$

* \vec{OB} هو متجه الموضع لنقطة B بالنسبة لنقطة الأصل O

ويكتب: $\vec{OB} = (٤، -٣)$



ملاحظة

نظراً لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية « O » لذلك نرمز لمتجه الموضع « \vec{OA} » بالرمز « \vec{A} »

ففي الشكل السابق: نكتب: $\vec{A} = (٢، ٣)$ ، $\vec{B} = (٤، -٣)$

مقياس المتجه

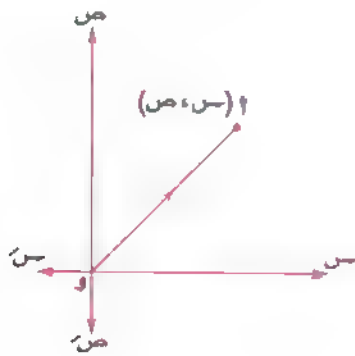
هو طول القطعة المستقيمة التي تمثل المتجه.

فإذا كان : $\vec{a} = (س، ص)$ فإن : $\|\vec{a}\| = \text{طول } \vec{a}$

وإذا استخدمنا قانون البعد بين نقطتين لإيجاد طول \vec{a}

$$\text{فإن : طول } \vec{a} = \sqrt{(س-0)^2 + (ص-0)^2}$$

$$\therefore \|\vec{a}\| = \sqrt{س^2 + ص^2}$$



فمثلاً

• إذا كان : $\vec{a} = (-4، 3)$ فإن : $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5$ وحدة طول.

• إذا كان : $\vec{b} = (-3\sqrt{2}، 3)$ فإن : $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (3)^2} = 6$ وحدة طول.

• إذا كان : $\vec{c} = (-3، 4)$ وكان $\|\vec{c}\| = 5$ فإن : $5 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$

$$\therefore 25 = 9 + 16 \quad \therefore 16 = 4^2 \quad \therefore 4 = \pm 4$$

متجه الوحدة

هو متجه معياره الواحد الصحيح.

$$\text{فمثلاً } \vec{a} = \left(\frac{4}{5}، \frac{3}{5}\right) \text{ متجه وحدة لأن } \|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1 \text{ وحدة طول.}$$

المتجه الصفري

هو متجه معياره يساوى الصفر ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\vec{0}$ حيث $\vec{0} = (0، 0)$ وهو متجه غير معين الاتجاه.

تحقق من فهمك

١ إذا كان : $\vec{a} = (-8، 6)$ فأوجد : $\|\vec{a}\|$

٢ هل $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}، \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ متجه وحدة أم لا ؟ ولماذا ؟

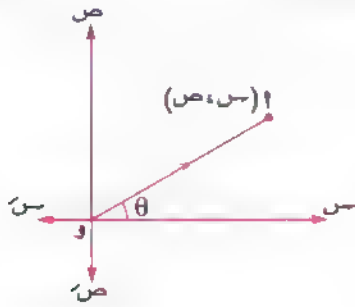
٣ إذا كان : $\vec{c} = (4، \frac{3}{5})$ متجه وحدة فأوجد قيمة : \vec{c}

الصورة القطبية لمتجه الموضع

إذا كان متجه الموضع \vec{r} يصنع زاوية قياسها θ

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن:

الصورة القطبية لمتجه الموضع $\vec{r} = (\|\vec{r}\|, \theta)$

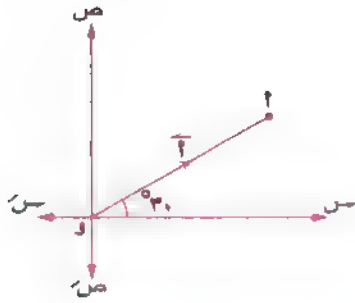


فمثلاً إذا كان \vec{r} يصنع زاوية قياسها 30° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان $\|\vec{r}\| = 6$ وحدة طول

فإن : الصورة القطبية لمتجه $\vec{r} = (6, 30^\circ)$

$$\vec{r} = (6, \frac{\pi}{6})$$



ملاحظة

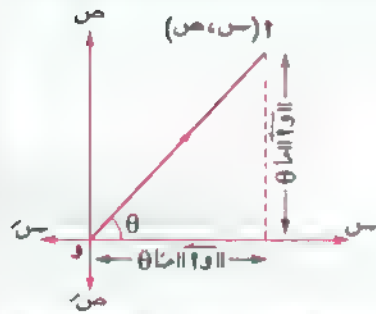
إذا كان : متجه موضع النقطة $P(x, y)$

على الصورة القطبية $\vec{r} = (\|\vec{r}\|, \theta)$ فإن :

$$\cos \theta = \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \sin \theta = \frac{y}{\|\vec{r}\|} \text{ حيث } \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وتكون الصورة الإحداثية لمتجه \vec{r} هي :

$$\vec{r} = (\|\vec{r}\| \cos \theta, \|\vec{r}\| \sin \theta)$$



مثال ١

إذا كان \vec{r} متجه موضع النقطة P بالنسبة لنقطة الأصل

فأوجد إحداثيي النقطة P في كل من الحالات الآتية :

$$\vec{r} = (8, \frac{\pi}{3}) \quad \text{٣}$$

$$\vec{r} = (6\sqrt{2}, 135^\circ) \quad \text{٢}$$

$$\vec{r} = (10\sqrt{3}, 60^\circ) \quad \text{١}$$

الحل

$$\text{١} \quad \begin{cases} \text{س} = 10\sqrt{3} \cos 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 5\sqrt{3} \\ \text{ص} = 10\sqrt{3} \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \end{cases} \therefore P(5\sqrt{3}, 15)$$

$$\text{٢} \quad \begin{cases} \text{س} = 6\sqrt{2} \cos 135^\circ = 6\sqrt{2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -6 \\ \text{ص} = 6\sqrt{2} \sin 135^\circ = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6 \end{cases} \therefore P(-6, 6)$$

$$\text{٣} \quad \begin{cases} \text{س} = 8 \cos \frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \\ \text{ص} = 8 \sin \frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{cases} \therefore P(4, 4\sqrt{3})$$

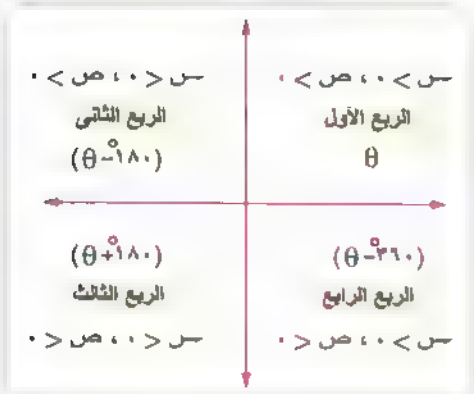
مثال ٢

إذا كان \vec{w} متجه موضع النقطة z بالنسبة لنقطة الأصل

أوجد الصورة القطبية للمتجه \vec{w} في كل من الحالتين الآتيتين :

$$\vec{w}_1 = (4, \sqrt{3}) \quad \vec{w}_2 = (-5, \sqrt{3})$$

الحل .



$$1. \therefore \vec{w}_1 = (4, \sqrt{3})$$

$$\therefore \|\vec{w}_1\| = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$$

= ٨ وحدة طول.

$$\cos \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

∴ قياس الزاوية الحادة التي ظلها $\frac{1}{2}$

$$\text{هي : } \theta = 60^\circ$$

∴ س < ٠ ، ص < ٠

$$\therefore \vec{w}_1 = (8, 60^\circ)$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\therefore \|\vec{w}_2\| = \sqrt{(-5)^2 + (\sqrt{3})^2} = 10 \text{ وحدة طول.}$$

$$2. \therefore \vec{w}_2 = (-5, \sqrt{3})$$

$$\cos \theta = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

∴ قياس الزاوية الحادة التي ظلها $(\frac{1}{2})$ هي $(\frac{1}{2}) = 60^\circ$

$$\therefore \vec{w}_2 = (10, 330^\circ)$$

$$\therefore \theta = 330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$$

∴ س < ٠ ، ص > ٠

حاول بنفسك

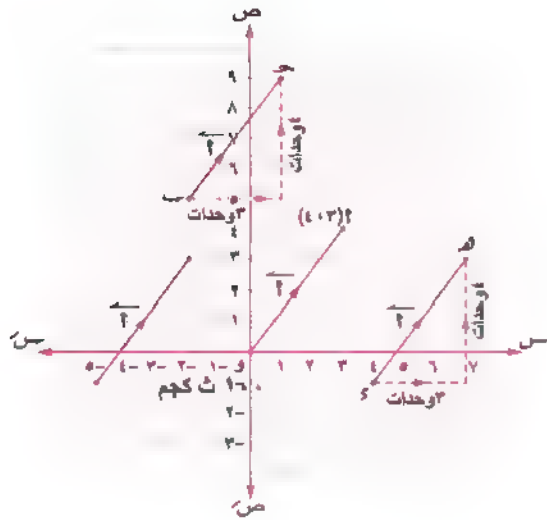
١. إذا كان متجه الموضع $\vec{w} = (5, \sqrt{3})$ فأوجد إحداثيي النقطة z

٢. اكتب بالصورة القطبية متجه الموضع $\vec{w} = (-12, \sqrt{3})$

المتجهان المتكافئان

كل متجه $\vec{a} - (\text{س} , \text{ص})$ يمكن تمثيله هندسياً بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة والتي كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة $z = (\text{س} , \text{ص})$

ففى الشكل المقابل



$\vec{u} = (4, 3)$ هو متجه الموضع للنقطة أ

$$\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \dots$$

$$\|\vec{u}\| = \dots = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ فى نفس الاتجاه

ولذلك يعتبر كل من :

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ تمثيلاً هندسياً للمتجه أ

$$\left[\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \dots = \vec{u} = (4, 3) \right]$$

• نلاحظ مما سبق : ارتباط المتجهات بالأزواج المرتبة أى بعناصر $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ أى (\vec{u})

ولذلك يمكن استنتاج تعريف المتجهات بمفهومها الرياضى أو الجبرى كالآتى :

تعريف

عناصر المجموعة \mathcal{E} مع عمليتي الجمع والضرب فى عدد حقيقى المعرفتين عليها تسمى متجهات ويرمز لها بأحد الرموز : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$

حيث إن المجموعة \mathcal{E} = مجموعة الأزواج المرتبة لحاصل الضرب الديكارتى $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$

$$= \{ (s, v) : s \in \mathcal{E}, v \in \mathcal{E} \}$$

جمع متجهين جبرياً

$$\text{إذا كان } \vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{E}, \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{E} \text{ فإن}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\text{فمثلاً إذا كان } \vec{u} = (4, 3), \vec{v} = (2, 1) \text{ فإن } \vec{u} + \vec{v} = (4+2, 3+1) = (6, 4)$$

خواص جمع المتجهات

$$[1] \text{ خاصية الانغلاق : لكل } \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E} \text{ يكون } \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E}$$

$$[2] \text{ خاصية الإبدال : لاى متجهين } \vec{u}, \vec{v} \text{ يكون } \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

٣ خاصية الدمج أو التجميع : لأي ثلاثة متجهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} يكون :

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

٤ خاصية وجود العنصر المحايد : لأي متجه \vec{a} يوجد متجه صفري $\vec{0}$ و $(\vec{0}, \vec{a})$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

٥ خاصية توفر المعكوسات الجمعية : لكل متجه \vec{a} (س ، ص) يوجد متجه $(-\vec{a}) = (-\text{س} ، -\text{ص})$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0} \quad \text{حيث : } \vec{0} = (\text{المتجه الصفري}) \text{ والمتجه } (-\vec{a}) \text{ يسمى المعكوس الجمعي للمتجه } \vec{a}$$

٦ خاصية الحذف : لأي ثلاثة متجهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} إذا كان $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ فإن $\vec{b} = \vec{c}$

ضرب متجه في عدد حقيقي

إذا كان $\vec{a} = (\text{س} ، \text{ص})$ $\vec{a} \in \mathcal{E}$ ، $\vec{a} \in \mathcal{E}$ فإن : $\vec{a} = (\text{س} ، \text{ص}) = (\text{س} ، \text{ص})$ (لـ ص)

$$\text{فمثلاً إذا كان } \vec{a} = (٢ ، -٥) \quad \text{فإن } ٣\vec{a} = (٦ ، -١٥) = (٢ ، -٥) \cdot ٣$$

خواص ضرب المتجه في عدد حقيقي

١ خاصية التوزيع :

$$(١) \text{ لأي متجهين } \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} \in \mathcal{E} \text{ يكون : } \vec{a} + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$

$$(ب) \text{ لأي متجه } \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} \in \mathcal{E} \text{ يكون : } \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$$

٢ خاصية الدمج أو التجميع : لأي متجه \vec{a} ، \vec{b} ، $\vec{c} \in \mathcal{E}$

$$\text{يكون : } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

٣ خاصية الحذف : لأي متجهين \vec{a} ، $\vec{b} \in \mathcal{E}$ إذا كان $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ فإن $\vec{b} = \vec{c}$

مثال ٣

$$\text{إذا كان } \vec{a} = (٢ ، -١) ، \vec{b} = (٢ ، ٥) ، \vec{c} = (-٤ ، ٢) \text{ فأوجد كلاً من المتجهات الآتية :}$$

١ $٢\vec{a} - ٣\vec{b}$

$$٢ \quad \frac{١}{٣} (٤\vec{a} + ٢\vec{b} - \vec{c})$$

$$٣ \quad ٢ - ٣(\vec{a} + \vec{b}) \text{ حيث } \vec{0} \text{ المتجه الصفري.}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 ١ \quad \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} &= \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} \\
 ٢ \quad \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} \\
 &= \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - (\vec{a} - \vec{b})) = \frac{1}{2}\vec{b} \\
 ٣ \quad \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} &= (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c} = (\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = \vec{b} - \vec{c} \\
 &= (\vec{b} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}
 \end{aligned}$$

مثال ٤

إذا كان: $\vec{a} = (١, ٦)$ ، $\vec{b} = (٢, ١)$ فأوجد: $\|\vec{a} - \vec{b}\|$

الحل

$$\begin{aligned}
 \therefore \vec{a} - \vec{b} &= (١, ٦) - (٢, ١) = (-١, ٥) \\
 \therefore \|\vec{a} - \vec{b}\| &= \sqrt{(-١)^2 + ٥^2} = \sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}
 \end{aligned}$$

حاول بنفسك

إذا كان: $\vec{a} = (١, ٦)$ ، $\vec{b} = (٢, ١)$ ، $\vec{c} = (٥, ٥)$ فأكتب على الصورة القطبية المتجه $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ حيث $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

تساوي متجهين

لاي متجهين $\vec{a} = (١, ٦)$ ، $\vec{b} = (٢, ١)$ ، $\vec{c} = (٥, ٥)$ يكون: $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

فمثلاً إذا كان: $\vec{a} = (١, ٦)$ ، $\vec{b} = (٢, ١)$ ، $\vec{c} = (٥, ٥)$ وكان: $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

مثال ٥

إذا كان: $\vec{a} = (٢, ٣)$ ، $\vec{b} = (٥, ٣)$ عبر عن \vec{a} بدلالة \vec{b} ، $\vec{c} = (١, ١٢)$

الحل

$$\begin{aligned}
 \text{نفرض أن: } \vec{a} &= \vec{b} + \vec{c} \\
 \therefore \vec{a} &= (٢, ٣) + (٥, ٣) = (٧, ٦) \\
 &= (٧, ٦) + (١, ١٢) = (٨, ١٨)
 \end{aligned}$$

$$\therefore (1, 12) = (ل 5 + ل 3 - ل 2, 12)$$

$$(1) \quad 36 = ل 9 + ل 6 \therefore \quad 12 = ل 3 + ل 2 \text{ ويضرب المعادلة } \times 3$$

$$(2) \quad 2 = ل 10 + ل 6 \therefore \quad 1 = ل 5 + ل 3 \text{ ويضرب المعادلة } \times 2$$

$$\therefore ل = 2 \quad \text{بجمع المعادلتين (1)، (2) : } 28 = ل 19$$

$$\therefore ل = 2 \quad \text{وبالتعويض في (1) : } 6 = ل 18 \text{ ومنها } ل = 3$$

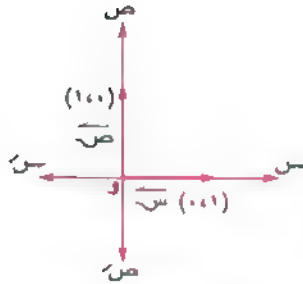
$$\therefore ح = 2 + 2 = 4$$

متجهي الوحدة الأساسيان $\vec{s}, \vec{ص}$

إذا كان لدينا نظام إحداثي متعامد في المستوى ، (و) نقطة الأصل فإن :

1 متجه الوحدة الأساسي $\vec{s} = (1, 0)$ هو متجه الموضع

لنقطة (1, 0) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور السينات.



2 متجه الوحدة الأساسي $\vec{ص} = (0, 1)$ هو متجه الموضع للنقطة (0, 1) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

$$* \text{ لاحظ أن } \|\vec{s}\| = \|\vec{ص}\| = 1$$

التعبير عن أي متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

إذا كان : $\vec{أ}$ متجهًا في المستوى حيث $\vec{أ} = (س, ص)$

فإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين كالتالي :

$$\vec{أ} = (س, ص) = (س, 0) + (0, ص) \quad (\text{من تعريف الجمع})$$

$$= س(1, 0) + ص(0, 1) \quad (\text{من تعريف الضرب في عدد حقيقي})$$

$$\therefore \vec{أ} = س\vec{s} + ص\vec{ص}$$

وتستخدم هذه القاعدة مباشرة للتعبير عن الزوج المرتب الذي يمثل $\vec{أ}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{s}, \vec{ص}$

$$\text{فمثلاً } \vec{أ} = (3, 2) = 3\vec{s} + 2\vec{ص} \quad , \quad \vec{ب} = (-5, 1) = -5\vec{s} + \vec{ص}$$

مثال 6

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

$$\vec{أ} = (2, -1) = 2\vec{s} - \vec{ص}$$

$$\vec{ب} = (-6, 8) = -6\vec{s} + 8\vec{ص}$$

$$\vec{ج} = (-6, 2) = -6\vec{s} + 2\vec{ص}$$

$$\vec{د} = (0, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}\vec{ص}$$

الحل .

$$\therefore \|\vec{F}\| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10 \text{ وحدة طول.}$$

$$\therefore \|\vec{J}\| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = 2 \text{ وحدة طول.}$$

$$\therefore \|\vec{F}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (0)^2} = \frac{2}{3} \text{ وحدة طول.}$$

$$\therefore \|\vec{H}\| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10} \text{ وحدة طول.}$$

$$1 \quad \vec{F} = -8\vec{s} + 6\vec{v}$$

$$2 \quad \vec{J} = -2\vec{v}$$

$$3 \quad \vec{F} = \frac{2}{3}\vec{s}$$

$$4 \quad \vec{H} = 2\vec{s} - 6\vec{v}$$

حاول بنفسك

عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ثم أوجد معياره :

$$1 \quad \vec{F} = (7, -24)$$

$$2 \quad \vec{J} = (0, 6)$$

$$3 \quad \vec{H} = (-12, 16)$$

$$4 \quad \vec{F} = (0, 12)$$

تمرين 7

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

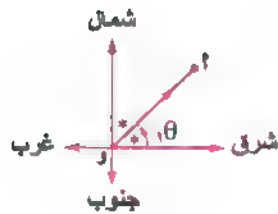
1 قوة مقدارها ١٢ نيوتن تؤثر في اتجاه الشمال الشرقي.

2 سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٨ أمتار كل ثانية في اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

3 إزاحة جسم مسافة ٢٤ مترًا في اتجاه الشمال.

4 قوة مقدارها ٤ ثقل كجم تؤثر في اتجاه ٣٠° شرق الجنوب.

الحل .



1 نفرض أن متجه الموضع للقوة = \vec{F}

∴ اتجاه الشمال الشرقي ينصف الزاوية بين الشمال والشرق.

$$\therefore \theta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

* الصورة القطبية $\vec{F} = (12, 45^\circ)$

* الصورة الإحداثية $\vec{F} = (12 \cos 45^\circ, 12 \sin 45^\circ) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$$\vec{F} = 2\sqrt{2}\vec{s} + 2\sqrt{2}\vec{v}$$

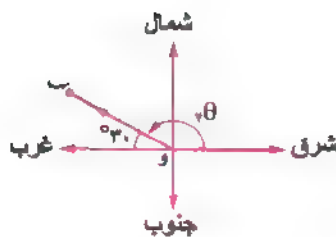
2 نفرض أن متجه الموضع للسرعة = \vec{v}

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

* الصورة القطبية $\vec{v} = (8, 150^\circ)$

* الصورة الإحداثية $\vec{v} = (8 \cos 150^\circ, 8 \sin 150^\circ) = (-4, 4\sqrt{3})$

$$\vec{v} = -4\vec{s} + 4\sqrt{3}\vec{v}$$



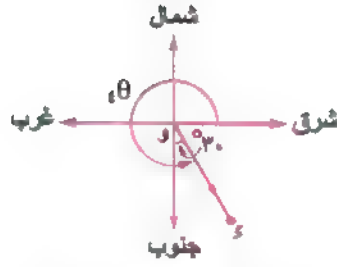


٣ نفرض أن متجه الموضع للإزاحة \vec{r} $\therefore \theta = 90^\circ$

* الصورة القطبية $\vec{r} = (24, 90^\circ)$

* الصورة الإحداثية $\vec{r} = (24 \cos 90^\circ, 24 \sin 90^\circ) = (0, 24)$

* $\vec{r} = 24 \hat{j}$



٤ نفرض أن متجه الموضع للقوة \vec{F}

$\therefore \theta = 30^\circ + 270^\circ = 300^\circ$

* الصورة القطبية $\vec{F} = (4, 300^\circ)$

* الصورة الإحداثية $\vec{F} = (4 \cos 300^\circ, 4 \sin 300^\circ) = (2, -2\sqrt{3})$

* $\vec{F} = 2\hat{i} - 2\sqrt{3}\hat{j}$

حاول بنفسك

اكتب كلاً من المتجهات التالية بالصورة القطبية والإحداثية ثم عبر عنها بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :

١ قوة مقدارها ٦٣ نيوتن تؤثر على الجسم فى اتجاه الشرق.

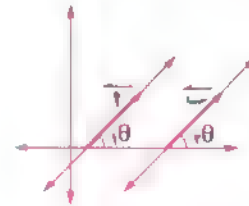
٢ إزاحة جسم مسافة ٢ أمتار فى اتجاه الجنوب.

٣ سرعة منتظمة لسيارة تقطع ٥٠ مترًا كل ثانية فى اتجاه الشمال الغربى.

توازي متجهين وتعامدهما

* لكل \vec{A} ، \vec{B} متجهين غير صفريين حيث : $\vec{A} = (A_x, A_y)$ ، $\vec{B} = (B_x, B_y)$

١ إذا كان $\vec{A} // \vec{B}$



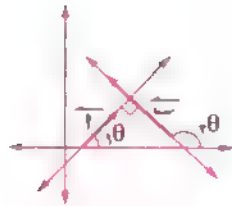
فإن : $\theta_A = \theta_B$

$$\therefore \frac{A_x}{A_y} = \frac{B_x}{B_y}$$

$$\therefore (A_x B_y - A_y B_x) = 0$$

والعكس صحيح.

٢ إذا كان $\vec{A} \perp \vec{B}$



فإن : $\theta_A + \theta_B = 90^\circ$

$$\therefore \frac{A_x}{A_y} = -\frac{B_x}{B_y}$$

$$\therefore (A_x B_y + A_y B_x) = 0$$

والعكس صحيح.

فمثلاً إذا كان $\vec{A} = (2, 4)$ ، $\vec{B} = (8, 6)$ ، $\vec{C} = (9, 12)$

فإن $\vec{A} \perp \vec{B}$ لأن : $[3 \times 8 + 4 \times (-6) = 0]$

$\vec{A} // \vec{C}$ لأن : $[2 \times 12 - 4 \times 9 = 0]$

* **لاحظ أن** ميل $\vec{A} = \frac{4}{2} = 2$ ، ميل $\vec{B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ،

ميل $\vec{C} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ ، ميل $\vec{A} = 2$ ، ميل $\vec{B} = \frac{3}{4}$ ،

$\vec{A} \perp \vec{B}$ لأن : ميل $\vec{A} \times$ ميل $\vec{B} = -1$ ، $\vec{A} // \vec{C}$ لأن : ميل $\vec{A} =$ ميل \vec{C} .

ملابظة

إذا كان : $\vec{A} = (س, ص)$

فإن : ميل $\vec{A} = \frac{ص}{س}$

مثال 8

إذا كان : $\vec{A} = (-2, 3)$ ، $\vec{B} = (-4, م)$ أوجد قيمة م في كل مما يأتي :

$$\vec{A} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A} // \vec{B}$$

الحل

$$\therefore -2 - م = -4 \Rightarrow م = 2$$

$$\therefore م = 6$$

$$\therefore 0 = م \times 3 + (-4) \times (-2)$$

$$\therefore م = \frac{8}{3}$$

$$1 \therefore \vec{A} // \vec{B}$$

$$\therefore 3 = م \times 2$$

$$2 \therefore \vec{A} \perp \vec{B}$$

$$\therefore 3 = م \times 8$$

مثال 9

أنشئ نظاماً للإحداثيات المتعامدة في المستوى حيث (و) هي نقطة الأصل ثم مثل عليه كلاً مما يأتي :

1 المتجه $\vec{A} = (1, 3)$ بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (1, 2)

2 المتجه $\vec{B} = (4, -2)$ بقطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة (-1, 1) ثم أوجد إحداثي نقطة النهاية في كل حالة.

الحل

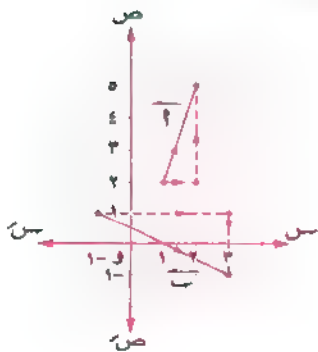
1 لتمثيل المتجه $\vec{A} = (1, 3)$

* نبدأ من النقطة (1, 2) ثم نتحرك يميناً وحدة

واحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأعلى 3 وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

\therefore نقطة النهاية = (2, 5)



٢ لتمثيل المتجه $\vec{b} = (4, -2)$

* نبدأ من النقطة (١- ، ١) ثم نتحرك يميناً ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* ثم نتحرك لأسفل وحدتين في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

∴ نقطة النهاية = (٣ ، ١)

ملاحظة

إذا كان : \vec{M} متجهًا غير صفري ، $e \neq 0$. فإن : $\vec{M} // e$ $\Leftrightarrow \vec{M}$ ويكون $\|e\| = \| \vec{M} \|$.
حيث اتجاه e \vec{M} هو نفس اتجاه \vec{M} لكل $e > 0$ ، اتجاه e \vec{M} هو عكس اتجاه \vec{M} لكل $e < 0$.

متوازيان وفي نفس الاتجاه.

فمثلاً ٤٠، ٤٢

متوازنان وفي اتجاهين متضادين.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$


۱۰ مثال

إذا كان : \bar{A} متجه غير صفري أوجد قيمة \bar{A} في كل من الحالتين الآتيتين :

$$\|\hat{\tau}_n - \tau\| = \|\hat{\tau} \circ \gamma\| \quad (2)$$

$$\| \hat{\gamma}_n - \gamma \| = \| \hat{\gamma} \|$$

الحل

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\| \hat{f}_n \|_2^2 = \| \hat{f}_n \|_1^2 \quad \text{and} \quad \hat{f}_n = \hat{f}_n^*.$$

$$\|\hat{r}_2 - \hat{r}\| = \|\hat{r}\| \theta \therefore$$

$$2 = |2| \cdot 2 \therefore$$

$$\|\hat{\tau}\|_2 = \|\hat{\tau}\|_1 \|\varphi\|_2 \therefore$$

$$\|\hat{f}_3 - \hat{f}\| = \|\hat{f}_2 - \hat{f}\| \therefore$$

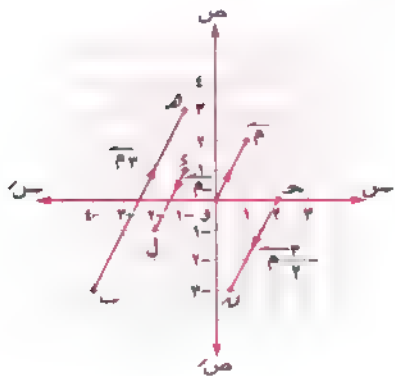
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \pm = 0 \therefore$$

$$\frac{1}{2} = |e| \therefore$$

۱۱ مثال

ارسم المتجه $\vec{m} = (1, 2)$ ثم ارسم من النقط: ب $(-4, -3)$ ، ح $(2, 0)$ ، د $(-1, 1)$ القطع المستقيمة الموجهة والتي تكافئ \vec{m} ، $-\frac{3}{4}\vec{m}$ ، $-\vec{m}$ على الترتيب.

الحل



١ نرسم المتجه $\vec{m} = (١, ٢)$ بداية من النقطة $(٠, ٠)$

٢ فرسم المتجه $\vec{PQ} = (2, 1) = (3, 6) - (1, 5)$

بداية من النقطة ب (٤- ، ٣-)

٣ نرسم المتجه $\vec{r} = \left(2, 1 \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{r}$

بداية من النقطة $(0, 2)$

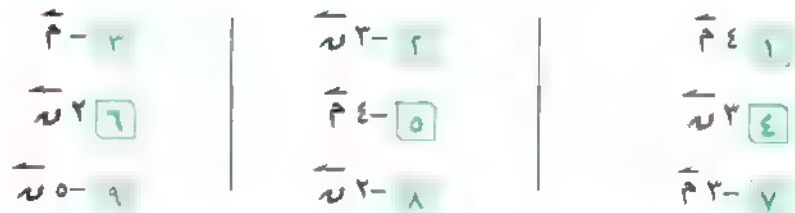
٤] نرسم المتجه $\vec{M} = (-1, -2)$ بداية من النقطة $(-1, -1)$

مثال ١٢

الشبكة المقابلة لتوازيات أضلاع متطابقة ، عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين \vec{u} ، \vec{v} :



الحل :



ملاحظة :

إذا كان : \vec{a} ، \vec{b} متجهين غير صفريين وكان $\vec{a} = k\vec{b}$ ، $k \neq 0$ فإن : $\vec{a} // \vec{b}$

فمثلاً إذا كان : $\vec{a} = (2, 3)$ ، $\vec{b} = (10, 15)$ ،
 $\vec{a} // \vec{b} \therefore \vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow (2, 3) = k(10, 15)$

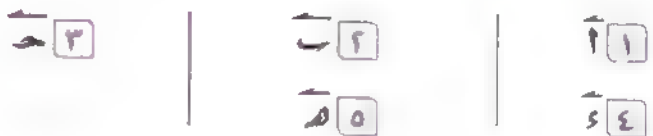
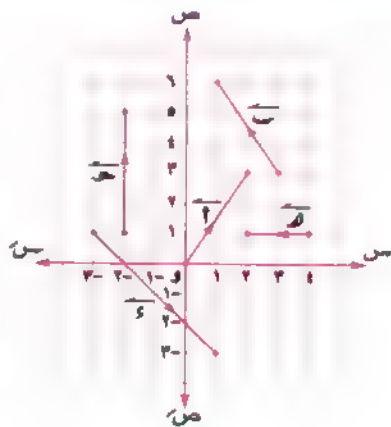
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

تمثيل لبعض المتجهات في المستوى المتعامد

اكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهي

الوحدة الأساسيين :





أختر نفسك

على المتجهات

تمارين

2

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • تطبيق • مستويات عليا

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كان : $\vec{a} = (5, -12)$ فإن : $\|\vec{a}\| = \dots\dots\dots$
- (١) ١٣ (ب) ٧- (ج) ١٧ (د) ٧
- (٢) إذا كان : $\vec{a} = (12, 18)$ فإن : $\frac{2}{3}\vec{a} = \dots\dots\dots$
- (١) (٨ ، ١٢) (ب) (١٢ ، ٨) (ج) (٦ ، ٤) (د) (١٨ ، ٢٧)
- (٣) كل المتجهات الآتية هي متجهات وحدة ما عدا
- (١) (٠ ، ١) (ب) (٠,٦ ، ٠,٨) (ج) (٠ ، ١-) (د) (١ ، ١)
- (٤) إذا كان : $(6, 4)$ ، $(3, م)$ متجهين متعامدين فإن : $م = \dots\dots\dots$
- (١) ٢ (ب) ٢- (ج) ٨ (د) ٤,٥-
- (٥) إذا كان : $\vec{a} = (2, 1)$ ، $\vec{b} = (-3, ٤)$ متوازيين فإن : $٤ = \dots\dots\dots$
- (١) $\frac{2}{3}-$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}-$ (د) $\frac{2}{4}$
- (٦) إذا كان : $\vec{a} = (4, 5)$ ، $\vec{b} = (-20, ١٦)$ فإن : المتجهين \vec{a} ، \vec{b}
- (١) متعامدان. (ب) متوازيان. (ج) متكافئان. (د) غير ذلك.
- (٧) إذا كان : $\vec{a} = (٤, ٢)$ ، $\vec{b} = ٢\vec{a} - \vec{c}$ وكان : $\vec{a} \perp \vec{b}$ فإن : $٤ = \dots\dots\dots$
- (١) ١ (ب) ١- (ج) $١ \pm$ (د) صفر
- (٨) إذا كان : $\vec{a} = (4, 2)$ ، $\vec{b} = (1, -2)$ فإن : $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \dots\dots\dots$
- (١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٧
- (٩) إذا كان : $\vec{a} = (3, 5)$ ، $\vec{b} = (4, 6)$ فإن : $\|\vec{a} + ٢\vec{b}\| = \dots\dots\dots$
- (١) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١٤
- (١٠) إذا كان : $\vec{a} = (-3, 4)$ ، $\vec{b} = (2, 1)$ ، $\vec{c} = \vec{a} + ٢\vec{b}$ فإن : $\vec{c} = \dots\dots\dots$
- (١) (١- ، ٥) (ب) (٤- ، ٩) (ج) (١ ، ٦) (د) (١ ، ٥)
- (١١) إذا كان : $\vec{a} + \vec{b} = (8, ١٦)$ ، $\vec{a} = (5, ١٢)$ فإن : $\|\vec{b}\| = \dots\dots\dots$
- (١) ٧ (ب) ٥ (ج) ١٣ (د) $٨\sqrt{٢}$

- (١٢) إذا كان : $\vec{u} = (2, 3)$ ، $\vec{v} = (3, -2)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, 3)$ (ب) $\vec{u} = (3, -2)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٣) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\|\vec{u}\| = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٤) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٥) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٦) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٧) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٨) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (١٩) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (٢٠) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (٢١) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (٢٢) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (٢٣) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$
- (٢٤) إذا كان : $\vec{u} = (2, -4)$ ، $\vec{v} = (3, 4)$ ، $\vec{w} = (2, 3)$ فإن : $\vec{u} + \vec{v} = \dots$
- (١) $\vec{u} = (2, -4)$ (ب) $\vec{u} = (3, 4)$ (ج) $\vec{u} = (5, 1)$ (د) $\vec{u} = (6, 1)$

(٢٥) إذا كان $\vec{P} = (6\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ متجه موضع فى الصورة القطبية لنقطة P فإن $P = \dots\dots\dots$

- (١) $(6, 6)$ (ب) $(6, -6)$ (ج) $(6, 6)$ (د) $(-6, -6)$

(٢٦) الصورة القطبية للمتجه $\vec{P} = -3\sqrt{2}$ هى $\dots\dots\dots$

- (١) $(\frac{\pi}{2}, 3-)$ (ب) $(\frac{\pi}{2}, 3)$ (ج) $(\frac{\pi}{2}, 3-)$ (د) $(\frac{\pi}{2}, 3)$

(٢٧) الصورة القطبية للمتجه $\vec{P} = (6, 6\sqrt{2})$ هى $\dots\dots\dots$

- (١) $(\frac{\pi}{2}, 12)$ (ب) $(\frac{\pi}{2}, 12)$ (ج) $(\frac{\pi}{2}, 6)$ (د) $(\frac{\pi}{2}, 6)$

(٢٨) إذا كان $\vec{P} = (10, \theta)$ حيث $\theta = \frac{\pi}{6}$ متجه موضع لنقطة P فإن $P = \dots\dots\dots$

- (١) $(8, 6)$ أ، $(6, 8)$ (ب) $(8, 6)$ أ، $(6, 8)$ (ج) $(8, 6)$ أ، $(6, 8)$ (د) $(8, 6)$ أ، $(6, 8)$

(٢٩) فى الشكل المقابل :

$\|\vec{P}\| = 4$ وحدة طول

فإن $\vec{P} = \dots\dots\dots$ (بالصورة الإحداثية)

- (١) $(2, 2\sqrt{3})$ (ب) $(2, 2\sqrt{3})$ (ج) $(2, 2\sqrt{3})$ (د) $(2, 2\sqrt{3})$

(٣٠) إذا كان معيار المتجه \vec{P} يساوى ٧ فإن معيار المتجه $2\vec{P}$ يساوى $\dots\dots\dots$

- (١) ٧ (ب) ٢- (ج) ١٤ (د) ١٤-

(٣١) إذا كان $\vec{P} = (\frac{\pi}{4}, 2)$ فإن $2\vec{P} = \dots\dots\dots$

- (١) $(\frac{\pi}{2}, 6)$ (ب) $(\frac{\pi}{2}, 6)$ (ج) $(\frac{\pi}{2}, 3)$ (د) $(\frac{\pi}{2}, 3)$

(٣٢) إذا كان $\vec{L} = (2, 3-)$ ، $\vec{M} = (3, 1-)$ متوازيين فإن $\vec{L} + \vec{M} = \dots\dots\dots$

- (١) ٤ (ب) $\frac{11}{2}$ (ج) ١- (د) ٩-

(٣٣) إذا كان $\vec{P} = (4, 3)$ ، $\vec{Q} = (2, 3)$ وكان $\vec{P} \parallel \vec{Q}$ فإن $\dots\dots\dots$

- (١) $3 + 2 = 5$ (ب) $3 = 2$ (ج) $3 = 8$ (د) $3 = 8$

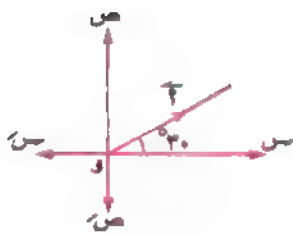
(٣٤) إذا كان $\vec{P} = (1, 1)$ ، $\vec{Q} = (2, 1)$ فإن قيم $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ التى تجعل $\vec{P} \perp \vec{Q}$ هى $\dots\dots\dots$

- (١) $1, 2-$ (ب) $2, 1$ (ج) $1, 2-$ (د) $2, 1-$

(٣٥) إذا كان $\vec{P} = (2, 1-)$ ، $\vec{Q} = (3, 4)$ ، $\vec{R} = (5, 1)$ والمتجهان \vec{P} و \vec{Q} متوازيين

فإن $\vec{R} = \dots\dots\dots$

- (١) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤



٣٦ إذا كان المتجهان $\vec{A} = (1, 2)$ ، $\vec{B} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$ متعامدين فإن : $\vec{u} = \dots\dots\dots$

- (1) 2 (ب) 2- (ج) $2 \pm$ (د) 4-

٣٧ أى أزواج المتجهات الآتية تكون متعامدة ؟

- (1) $(0, 2)$ ، $(1, -2)$ (ب) $(2, -5)$ ، $(4, -10)$
(ج) $(0, 2)$ ، $(2, 0)$ (د) $(1, 4)$ ، $(2, -8)$

٣٨ أى من أزواج المتجهات الآتية ليسا متضادين ؟

- (1) $\vec{A} = (2, 0)$ ، $\vec{B} = (5, 0)$ (ب) $\vec{A} = (-4, 2)$ ، $\vec{B} = (2, -1)$
(ج) $\vec{A} = (5, -2)$ ، $\vec{B} = (2, -5)$ (د) $\vec{A} = (0, 4)$ ، $\vec{B} = (0, -1)$

٣٩ إذا كان \vec{A} متجه غير صفري ، $\vec{B} \in \mathbb{R}$ وكان : $\|\vec{A}\| = 1$ فإن : $\vec{B} = \dots\dots\dots$

- (1) $\|\vec{A}\|$ (ب) 1 (ج) $\pm \|\vec{A}\|$ (د) $\frac{1}{\|\vec{A}\|}$

٤٠ إذا كان : $\vec{A} = \vec{B}$ حيث \vec{A} متجه وحدة فى اتجاه \vec{A} فإن : $\vec{B} = \dots\dots\dots$

- (1) $1 \pm$ (ب) $\|\vec{A}\|$ (ج) $\pm \|\vec{A}\|$ (د) $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

٤١ إذا كان : $\vec{A} = (-2, 1)$ ، $\vec{B} = (3, 4)$ ، $\vec{C} = (4, -3)$

وكان $\vec{A} // \vec{B}$ ، $\vec{A} \perp \vec{C}$ فإن : $\frac{\vec{B}}{\vec{C}} = \dots\dots\dots$

- (1) 6- (ب) 2- (ج) 2 (د) 2-

٤٢ إذا كان : $\vec{A} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$ ، $\vec{B} = \vec{u}$ ، $\vec{C} = (\frac{\pi}{18}, 5)$

فإن : $\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\| + \|\vec{C}\| = \dots\dots\dots$

- (1) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

٤٣ المتجه الذى يعبر عن إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه الجنوب الشرقى هو .

- (1) $20\sqrt{2}\vec{u} + 20\sqrt{2}\vec{v}$ (ب) $20\sqrt{2}\vec{u} - 20\sqrt{2}\vec{v}$
(ج) $20\sqrt{2}\vec{u} - 20\sqrt{2}\vec{v}$ (د) $20\sqrt{2}\vec{u} + 20\sqrt{2}\vec{v}$

٤٤ إذا كان معيار القوة $\vec{F} = 10$ نيوتن وتعمل فى اتجاه 30° شمال الشرق فإن : $\vec{F} = \dots\dots\dots$

- (1) $5\sqrt{3}\vec{u} - 5\vec{v}$ (ب) $5\sqrt{3}\vec{u} + 5\vec{v}$
(ج) $5\sqrt{3}\vec{u} + 5\vec{v}$ (د) $5\sqrt{3}\vec{u} - 5\vec{v}$

٤٥ سفينة تقطع مسافة $10\sqrt{2}$ كم شمالاً ثم ١٠ كم غرباً فإن الإزاحة = $\dots\dots\dots$ فى الصورة القطبية.

- (1) $(\frac{\pi}{6}, 20)$ (ب) $(\frac{\pi}{3}, 20)$ (ج) $(\frac{\pi}{6}, 20)$ (د) $(\frac{\pi}{3}, 20)$

(٤٧) إذا كان: $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \hat{\mathbf{r}}$ ، $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) = \hat{\mathbf{r}}$ ،

فإن المتجهين \vec{a} ، \vec{b} متعامدان إذا كان :

$$\bullet = \text{ص} \text{ص} - \text{ص} \text{ص} \quad (1) \quad \bullet = \text{ص} \text{ص} - \text{ص} \text{ص} \quad (2)$$

$$1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2} \quad (د)$$

٤٨) إذا كان: $(s_1, s_2) = \hat{a}$, $(s_2, s_3) = \hat{b}$, $(s_3, s_4) = \hat{c}$,

وكان : $س_1 س_2 + س_3 س_4 = س_1 س_3 + س_2 س_4 =$ صفوفان : $س_1 س_3 =$

(۱) صفر (ب) جن ۱ صم (ج) صم ۳ ص (د) جن ۱ ص

(٤٩) إذا كان: $\hat{1} = (٢, ١-)$ ، $\hat{2} = (٧, ٣)$ ، $\hat{3} = (٧, ٧)$ ، فإن: $\hat{4} = \dots\dots\dots$

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi} \quad (1) \quad \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi} \quad (2) \quad \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi} \quad (3) \quad \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi} \quad (4)$$

..... = $\hat{c} + \hat{f}$: فإن $(\pi \frac{2}{\xi}, \sqrt{2} \sqrt{2}) = \hat{c}$ ، $(\frac{\pi}{\xi}, \sqrt{2} \sqrt{2}) = \hat{f}$: إذا كان

$$\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \varepsilon\right) (ج) \quad (\cdot, \varepsilon) (د) \quad (\varepsilon, \varepsilon) (ب) \quad (\pi, \sqrt{2}, \varepsilon) (1)$$

(٥١) المتجهان $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \epsilon)$ ، $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{2} \epsilon)$ يكونان

(۱) متکافئان. (ب) متوازنان.

(ج) متعامدان. (د) متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه.

(٥٢) في الشكل المقابل :

أباحو له سداسي منتظم مركزه نقطة الأصل

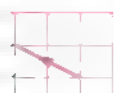
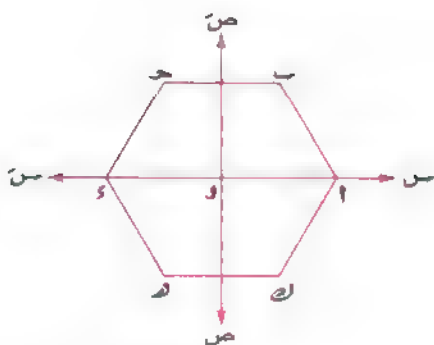
وطول ضلعه ٥ وحدات طولية

..... = فان : و

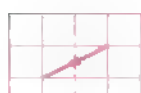
$$\left(\pi \frac{\varepsilon}{\gamma} \in \mathfrak{o}^-\right) (\mathfrak{p}) \qquad \left(\frac{\pi}{\gamma} \in \mathfrak{o}^-\right) (1)$$
$$\left(\frac{\pi}{\gamma}, 0\right) \quad \left(\pi \frac{\xi}{\gamma}, 0\right)$$

(٥٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل

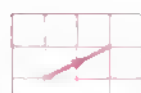
أي الأشكال الآتية يمثل المتجه $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؟



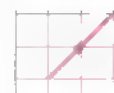
(۲)



(2)



(۲)



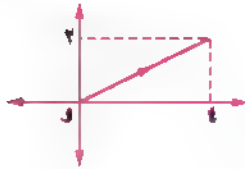
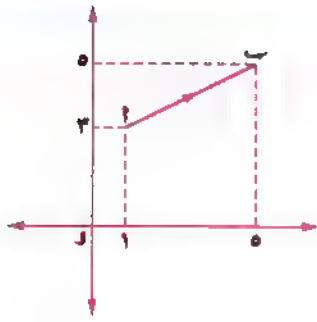
(i)

(٥٤) في الشكل المقابل :

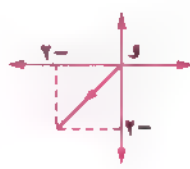
$$\vec{a} = (3, 1) \quad , \quad \vec{b} = (5, 5)$$

فإن الشكل الذي يمثل $\vec{a} - \vec{b}$

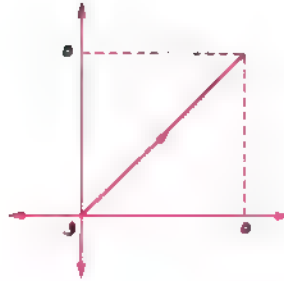
هو



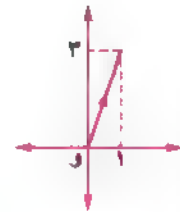
(د)



(ج)



(ب)



(أ)

الأسئلة المقالية

١ إذا كان : $\vec{a} = 2\vec{s} - \vec{t}$ ، $\vec{b} = -\vec{s} - 4\vec{t}$ أوجد :

| | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\vec{a} + \vec{b}$ (١) | $\vec{a} - \vec{b}$ (٢) | $\vec{a} + \vec{b}$ (٣) |
| $2\vec{a} + \vec{b}$ (٤) | $2\vec{a} - \vec{b}$ (٥) | $3\vec{a} - \vec{b}$ (٦) |

٢ إذا كان : $\vec{a} = (2, -2)$ ، $\vec{b} = (-4, 2)$ ، $\vec{c} = (1, 7)$ فأوجد :

| | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| $\ \vec{a} + \vec{b}\ $ (١) | $\ \vec{a} + \vec{c}\ $ (٢) | $\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\ $ (٣) |
| $\ \vec{a} - \vec{b}\ $ (٤) | $\ \vec{a} - \vec{c}\ $ (٥) | $\ \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\ $ (٦) |

٣ عبر عن كل من المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ، ثم أوجد معيار كل منها :

| | | |
|--------------------------------|---------------------------------|--|
| $\vec{a} = (3, -4)$ (١) | $\vec{b} = (8, -6)$ (٢) | $\vec{c} = (-5, 12)$ (٣) |
| $\vec{a} = (0, 2\sqrt{2})$ (٤) | $\vec{b} = (-3\sqrt{2}, 0)$ (٥) | $\vec{c} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (٦) |

٤ أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات الآتية :

| | |
|---|---|
| $\vec{a} = 8\sqrt{2}\vec{s} + 8\sqrt{2}\vec{t}$ (١) | $\vec{b} = 2\sqrt{2}\vec{s} + 2\sqrt{2}\vec{t}$ (٢) |
| $\vec{a} = (5\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$ (٣) | $\vec{b} = (7\sqrt{3}, -7)$ (٤) |
| $\vec{a} = 4\vec{s} - 4\vec{t}$ (٥) | |

٥ إذا كان \vec{a} متجه موضع النقطة A بالنسبة لنقطة الأصل في الصورة القطبية فأوجد إحداثيي النقطة A في كل مما يأتي :

| | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| $\vec{a} = (12\sqrt{3}, 60)$ (١) | $\vec{a} = (5, \frac{\pi}{4})$ (٢) |
| $\vec{a} = (24, 150)$ (٣) | $\vec{a} = (6, \frac{\pi}{3})$ (٤) |

٦ أوجد قيم s ، v في كل مما يأتي :

$$\begin{array}{l|l} (1) \quad s = (6, -) = (0, 3) & (2) \quad (s, -) = (0, 5) - (2, -) = (2, -) \\ (3) \quad (s, 2) = (2, -) - (1, -) = (1, -) & (4) \quad (s, 2) = (3, 2) + (1, -) = (4, -) \end{array}$$

٧ إذا كان : $\vec{a} = (6, -)$ ، $\vec{b} = (9, -)$ ، $\vec{c} = (2, -)$ ،

(١) أثبت أن : $\vec{a} // \vec{b}$ ، $\vec{b} \perp \vec{c}$ ، $\vec{a} \perp \vec{c}$

(٢) أوجد : $2\vec{a} + \vec{b}$ ، $\vec{b} - 2\vec{c}$ ، $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$

٨ إذا كان : $\vec{a} = (2, -)$ ، $\vec{b} = (3, 2)$ ،

اذكر العلاقة بين المتجهين : \vec{a} ، \vec{b} مع ذكر السبب.

٩ إذا كان : $\vec{m} = 2\vec{s} + 2\vec{v}$ ، $\vec{n} = 8\vec{s} - 12\vec{v}$

، $\vec{l} = 4\vec{s} + 10\vec{v}$ ، $\vec{q} = 6\vec{s} + \vec{v}$

(١) أثبت أن : $\vec{m} // \vec{n}$ (٢) أوجد : $\vec{m} \in \vec{q}$ إذا كان : $\vec{n} // \vec{l}$

(٣) أوجد قيمة : $4\vec{m} + \vec{n}$ ، $4(\vec{n} + \vec{m})$ ، أوجد : $\vec{b} \in \vec{q}$ إذا كان : $\vec{q} \perp \vec{n}$

(٥) هل : $\vec{q} \perp \vec{m}$ ؟ فسر إجابتك.

١٠ إذا كان : $\vec{a} = (2, -)$ ، $\vec{b} = (0, 2)$ ، $\vec{c} = (11, 0)$

، اكتب كلاً من المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

$2\vec{b}$ ، $3\vec{c}$ ، $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ، $\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

(٢) عبر عن \vec{c} بدلالة : \vec{a} ، \vec{b}

١١ إذا كان : $\vec{a} = (1, -)$ ، $\vec{b} = (2, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 0)$

أوجد المتجه \vec{a} الذي يحقق المعادلة : $2\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$ ، $(3, -\frac{5}{3})$

١٢ إذا كان : $\vec{a} = (7, -)$ ، $\vec{b} = (0, 2)$ ، $\vec{c} = 2\vec{s} + 3\vec{v}$

(١) أثبت أن : المتجه $\vec{l} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ يوازي المتجه $\vec{m} = 3\vec{s} - 8\vec{v}$

(٢) إذا كان : $\vec{l} = \vec{m}$ أوجد : \vec{a}

١٣ في مستوى إحداثي متعامد ، إذا كان : $\vec{l} = 5\vec{s} - 3\vec{v}$ ، $\vec{m} = -\vec{s} - 2\vec{v}$ ،

، $\vec{n} = 2\vec{s} - 3\vec{v}$ أوجد \vec{c} في الصورة القطبية حيث : $\vec{c} = \vec{l} + \vec{m} + 3\vec{n}$ ، $(4, 240^\circ)$

١٤ أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن :

(١) قوة مقدارها ٣٧ نيوتن تؤثر على جسم وتعمل في اتجاه الشمال.

(٤) سرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم/س في اتجاه الغرب.

(٣) إزاحة جسم مسافة ٢٥ مترًا في اتجاه الجنوب.

متجه معياره ٦ وحدات ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٥) إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم في اتجاه 30° شمال الغرب.

قوة مقدارها ٢٠ ث كجم تؤثر على جسم في اتجاه 30° جنوب الشرق.

(٦) إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم في اتجاه الشمال الغربي.

١٥ أ، ب، ج، د أربع نقط على استقامة واحدة مرتبة من اليمين إلى اليسار حيث أ:ب:ج:د = ٢:٣:٥

ضع العدد المناسب مكان النقط فيما يلي علمًا بأن الرمز « = » يعني تكافئ :

| | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (٣) | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ (٢) | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ (١) |
| $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (٦) | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ (٥) | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ٤ |
| $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}$ (٩) | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ (٨) | $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ (٧) |

١٦ إذا كان : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ أوجد :

(١) قيمة لـ التي تجعل المتجه ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$) يوازي المتجه \overrightarrow{BC}

(٢) قيمة لـ التي تجعل المتجه ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$) يوازي المتجه \overrightarrow{BC}

$-\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$

١٧ الشبكة المقابلة لمتوازيات أضلاع متطابقة.

عبر عن كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} :

| | | |
|--|--|--|
| \overrightarrow{AB} (١) | \overrightarrow{AC} (٢) | \overrightarrow{BC} (٣) |
| \overrightarrow{BA} (٤) | \overrightarrow{CA} (٥) | \overrightarrow{CB} (٦) |
| $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (٧) | $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (٨) | $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (٩) |
| $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ (١٠) | $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ (١١) | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (١٢) |

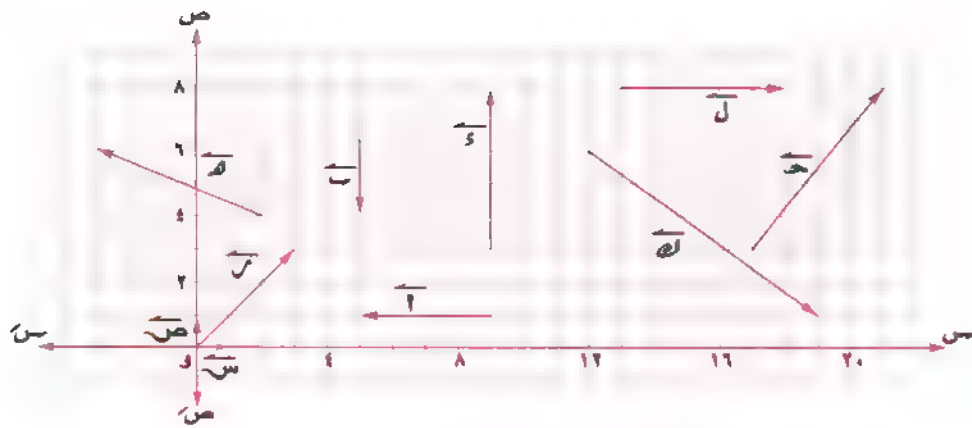
١٨ أنشئ نظامًا للإحداثيات المتعامدة في المستوى حيث (و) هي نقطة الأصل وعين عليه متجه الموضع الممثل

للمتجه $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ ثم ارسم :

قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة أ = $(-2, -3)$ تمثل المتجه \overrightarrow{AB} وأوجد إحداثي نقطة النهاية.

قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها النقطة ب = $(4, 5)$ تمثل المتجه \overrightarrow{AB} وأوجد إحداثي نقطة النهاية.

١٩ بين الشكل تمثيلًا لبعض المتجهات في المستوى الإحداثي المتعامد :



اكتب كل متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : \vec{a} متجه وكان $\|\vec{a}\| = 4$ فأى من المتجهات الآتية يكون متجه وحدة ؟

- (أ) $\frac{1}{4}\vec{a}$ (ب) $-\vec{a}$ (ج) $\frac{1}{4}\vec{a}$ (د) $\frac{2}{4}\vec{a}$

(٢) إذا كان : $\vec{a} = 3\vec{s} + 4\vec{v}$ ، $\vec{b} = 7\vec{s} + 24\vec{v}$

فإن : المتجه الذى له نفس معيار \vec{b} ويوازي المتجه \vec{a} هو

- (أ) $5\vec{s} + 20\vec{v}$ (ب) $10\vec{s} + 10\vec{v}$

- (ج) $20\vec{s} + 10\vec{v}$ (د) $10\vec{s} + 20\vec{v}$

(٣) إذا كان : $\vec{a} = 2\vec{s} - \vec{v}$ ، $\vec{b} = \vec{s} + \vec{v}$ ، $\vec{c} = \vec{s} + 2\vec{v}$

وكان $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$ فإن : $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

- (أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيح ؟

(أ) إذا كان : $\vec{a} = \vec{b}$ فإن : $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ (ب) إذا كان : $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ فإن : $\vec{a} = \vec{b}$

(ج) إذا كان : $\vec{a} // \vec{b}$ فإن : $\vec{a} = \vec{b}$ (د) إذا كان : $\vec{a} = \vec{b}$ فإن : $\vec{a} // \vec{b}$

(٥) قياس الزاوية بين المتجهين : $\vec{a} = 6\vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{b} = 3\vec{s} + 2\vec{v}$ هو

- (أ) صفر (ب) 30° (ج) 60° (د) 90°

تذكر • مهم • تطبيق • مستويات عليا

- (٦) قياس الزاوية بين المتجهين \vec{A} و \vec{B} : $\vec{A} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ ، $\vec{B} = -4\vec{u} + 3\vec{v}$ ، \vec{u} و \vec{v} متجهان متعامدان
 (أ) 45° (ب) 60° (ج) 120° (د) 150°

(٧) في الشكل المقابل :



إذا كان : \vec{u} يمثل القوة \vec{u} ، $\|\vec{u}\| = 12$ وحدة

فأي العبارات الآتية لا تمثل متجه القوة \vec{u} ؟

(أ) القوة \vec{u} معيارها 12 وحدة قوة وتعمل في اتجاه 60° شمال الغرب

(ب) $\vec{u} = (12 \text{ وحدة قوة} , 120^\circ)$

(ج) $\vec{u} = -6\vec{u} + 3\vec{v}$

(د) القوة \vec{u} معيارها 12 وحدة قوة وتعمل في اتجاه يصنع 30° مع الشمال

(٨) إذا كانت الصورة القطبية للمتجه \vec{A} هي $(12, \frac{2\pi}{3})$ فإن الصورة القطبية للمتجه $-\vec{A}$ هي

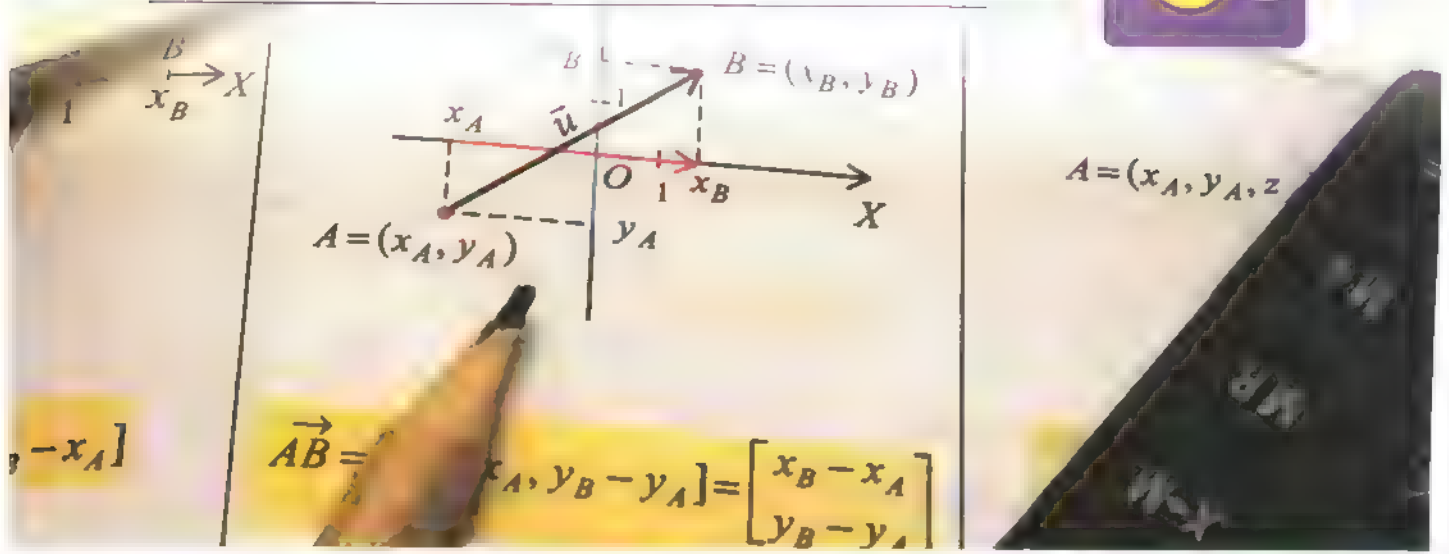
- (أ) $(12, \frac{5\pi}{3})$ (ب) $(12, \frac{2\pi}{3})$ (ج) $(6, \frac{4\pi}{3})$ (د) $(12, \frac{\pi}{3})$

(٩) إذا دار متجه الموضع $\vec{r} = (1, \sqrt{3})$ حول نقطة الأصل بزاوية قياسها 45° في عكس

اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الصورة القطبية للمتجه \vec{r} بعد دورانه هي

- (أ) $(2, 75^\circ)$ (ب) $(2, 45^\circ)$ (ج) $(2, 75^\circ)$ (د) $(4, 75^\circ)$

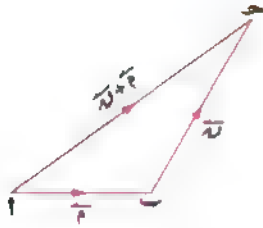
العمليات على المتجهات



أولاً

(قاعدة المثلث «علاقة شال»):

إذا كان \vec{AB} تمثل المتجه \vec{B} ، \vec{AC} تمثل المتجه \vec{A} ،
حيث إن نقطة النهاية (ب) للمتجه الأول \vec{A} هي
نفسها نقطة البداية للمتجه الثاني \vec{B}



فإن \vec{AC} تمثل المتجه $\vec{A} + \vec{B}$ | أي أن $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ |

| أي أن : الإزاحة \vec{AB} متبوعة بإزاحة أخرى \vec{BC} تكافئ إزاحة وحيدة \vec{AC} |

مثال ١

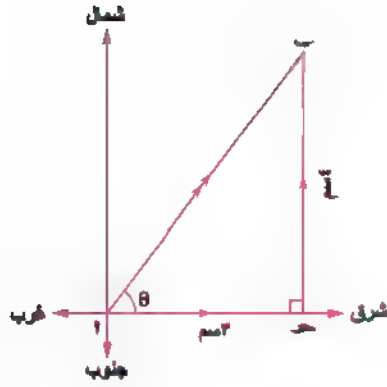
إذا تحركت سفينة من الموقع (١) في الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس رسم مناسب مستخدماً «دورك الهندسية» ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السفينة (\vec{AB}) إذا كانت الاتجاهات هي :

١ مسافة ٦٠٠ متر شرقاً ثم مسافة ٨٠٠ متر شمالاً.

٢ مسافة ٢٠ كم غرباً ثم مسافة ٣٠ كم في اتجاه 60° شمال الغرب.

الحل

١ نفرض ان مقياس الرسم هو :



كل « ٢٠٠ متر » في الحقيقة تمثل بـ « ١ سم » في الرسم

∴ ٦٠٠ متر تمثل بـ ٣ سم ، ٨٠٠ متر تمثل بـ ٤ سم

من الرسم وبالقياص نجد أن : $\frac{ب}{ا} = \frac{٥}{١٠٠٠}$

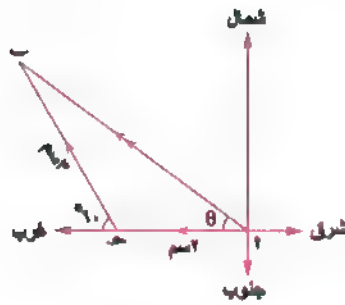
∴ معيار الإزاحة = $٥ \times ٢٠٠ = ١٠٠٠$ متر

، اتجاه الإزاحة $\theta = ٥٣^\circ$ (باستخدام المنقلة)

$$\theta = ٥٣^\circ = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{-١} = ٥٣^\circ$$

∴ السفينة تبعد عن الموقع ١ مسافة ١٠٠٠ متر في اتجاه ٥٣° شمال الشرق.

٢ نفرض ان مقياس الرسم هو :



كل « ١٠ كم » في الحقيقة تمثل بـ « ١ سم » في الرسم

∴ ٢٠ كم تمثل بـ ٢ سم ، ٣٠ كم تمثل بـ ٣ سم

ومن الرسم وبالقياص نجد أن : $\frac{ب}{ا} \approx \frac{٤,٤}{١٠}$

∴ معيار الإزاحة = $٤,٤ \times ١٠ = ٤٤$ كم

، اتجاه الإزاحة $\theta \approx ٣٧^\circ$ (باستخدام المنقلة)

∴ السفينة تبعد عن الموقع ١ مسافة ٤٤ كم

في اتجاه ٣٧° شمال الغرب.

حاول بنفسك

إذا تحركت سيارة من الموقع (٢) في الاتجاهات المعطاة حتى وصلت إلى الموقع (ب) ارسم مسار الرحلة بمقياس

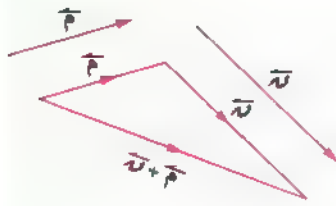
رسم مناسب مستخدماً أدواتك الهندسية ثم أوجد من الرسم مقدار واتجاه إزاحة السيارة (بـ ا) إذا كانت

الاتجاهات هي :

١ مسافة ١٢٠٠ متر شرقاً ثم مسافة ١٦٠٠ متر شمالاً.

٢ مسافة ٢٥ كم شرقاً ثم ٣٠ كم في اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

٣ مسافة ٥٠ كم غرباً ثم مسافة ٤٠ كم في اتجاه الشمال الغربي.



١ أى متجهين \vec{u} ، \vec{v} يمكن جمعهما (إيجاد محصلتهما) بإنشاء متجهين متتاليين ومكافئين للمتجهين \vec{u} ، \vec{v} كما فى الشكل المقابل.

٢ قاعدة شال لجمع متجهين صحيحة إذا كانت النقط

أ ، ب ، ج تنتمى إلى مستقيم واحد.

ففى الأشكال الثلاثة المقابلة يكون :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

٣ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ حيث إن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ «المتجه الصفرى»

؛ فى أى مثلث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

لأن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لآى مضلع :

فمثلاً فى الشكل الخماسى $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$$

ه فى أى شكل رباعى يكون :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$$

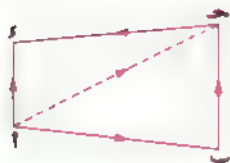
لأن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$$

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لآى مضلع :

فمثلاً فى الشكل الخماسى $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{0}$$



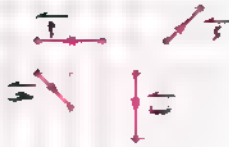
مثال ٢

في الشكل المقابل :

أربع متجهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ،

مثل بياناً المتجه \vec{e} حيث

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$



الحل .

نرسم المتجه \vec{a} كما هو موجود ثم من نهايته نرسم متجه يكافئ \vec{b} ومن نهايته نرسم متجه يكافئ \vec{c} ومن نهايته نرسم متجه يكافئ \vec{d} ثم نرسم متجه من نقطة بداية \vec{a} إلى نقطة نهاية \vec{d} فيكون المتجه \vec{e} هو محصلة المتجهات .



مثال ٣

في أي شكل رباعي $ABCD$ أثبت أن :

$$\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$$



الحل .

$$\vec{AB} - \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{DE}) - (\vec{AD} + \vec{DE}) = \vec{AE} - \vec{DE}$$

$$= \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD} - \vec{AE} = \vec{CD} - \vec{CE} = \vec{CB} - \vec{DE}$$

(١) حل آخر: الطرف الأيمن = $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CB} - \vec{AC} = \vec{CB} - \vec{CE} = \vec{CE} - \vec{CA} = \vec{CD} - \vec{AD}$

(٢) ، الطرف الأيسر = $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD} = \vec{CB} - \vec{CE} = \vec{CE} - \vec{CA} = \vec{CD} - \vec{AD}$ من (١) ، (٢) : ∴ الطرفان متساويان.

مثال ٤

$ABCD$ شكل رباعي فيه : $2\vec{AB} = 3\vec{AC}$ أثبت أن :

$$\boxed{1} \vec{AB} \text{ ذو شبه منحرف.} \quad \boxed{2} \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \quad \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

الحل .

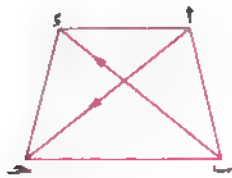
$$1 \because \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AC} \therefore \vec{AB} \parallel \vec{AC}, \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AC}$$

أي أن $\vec{AB} \neq \vec{AC}$

∴ الشكل $ABCD$ ذو شبه منحرف.

تذكر أنه

لإثبات أن الشكل الرباعي شبه منحرف
نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيان
وغير متساويين في الطول.



(٢) في Δaec : $\vec{ae} + \vec{ec} = \vec{ac}$ (١)

في Δbed : $\vec{be} + \vec{ed} = \vec{bd}$ (٢)

بجمع (١)، (٢):

$$\vec{ae} + \vec{ec} + \vec{be} + \vec{ed} = \vec{ac} + \vec{bd}$$

$$\vec{ae} + \vec{be} + \vec{ec} + \vec{ed} = \vec{ac} + \vec{bd}$$

$$\vec{ae} + \vec{be} + \vec{ec} + \vec{ed} = \vec{ac} + \vec{bd}$$

$$\vec{ae} + \vec{be} = \vec{ac} + \vec{bd}$$

مثال ٥

أب ح مثلث، e \in \overline{bc} بحيث $2\vec{be} = \vec{ec}$ و a أثبت أن: $3\vec{ab} + 4\vec{ac} = 7\vec{ae}$

الحل

(١) $\vec{ae} = \vec{ab} + \vec{be}$ $\therefore \vec{ae} = \vec{ab} + \frac{1}{3}\vec{bc}$

(٢) $\vec{ae} = \vec{ac} + \vec{ce}$ $\therefore \vec{ae} = \vec{ac} + \frac{2}{3}\vec{bc}$

وبجمع (١)، (٢):

$$\vec{ae} + \vec{ae} = \vec{ab} + \vec{ac} + \frac{1}{3}\vec{bc} + \frac{2}{3}\vec{bc}$$

$$\vec{ae} + \vec{ae} = \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc}$$

لكن: $2\vec{ae} = \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc}$ $\therefore \vec{ae} = \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc})$



مثال ٦

إذا كان: $\vec{m} = 3\vec{cs} - 4\vec{cs} + 7\vec{cs}$ أثبت أن: $\vec{m} = 3\vec{cs}$

الحل

$$\vec{m} = 3\vec{cs} - 4\vec{cs} + 7\vec{cs} = 3\vec{cs} + 3\vec{cs} = 6\vec{cs}$$

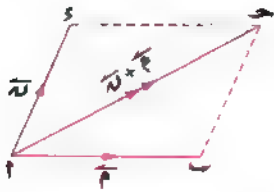
$$\vec{m} = 6\vec{cs} = 2(3\vec{cs})$$

$$\therefore \vec{m} = 3\vec{cs}$$

حاول بنفسك

١) أ ب ح د شكل رباعي فإذا كان: $\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{cd}$ أثبت أن: $\vec{a} - \vec{b} = \frac{3}{4}\vec{cd}$

٢) إذا كان: $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ أثبت أن: $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$



الطريقة الثانية (قاعدة متوازي الأضلاع) :

إذا كان : \vec{AB} تمثل المتجه \vec{r} ، \vec{AM} تمثل المتجه \vec{s}

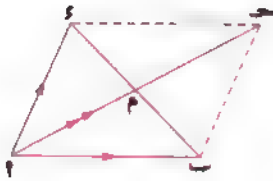
حيث إن المتجهين \vec{r} ، \vec{s} لهما نفس نقطة البداية (A)

* لإيجاد $\vec{r} + \vec{s}$ نكمل متوازي الأضلاع \vec{AB} حــ و نرسم قطره \vec{AC} فيكون \vec{AC} تمثل المتجه $\vec{r} + \vec{s}$

$$\boxed{\text{أي أن } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AM}}$$

وذلك لأن $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AM}$ (لاحظ أن : \vec{BC} يكافئ \vec{AM})

* في الشكل المقابل :



إذا كانت : M هي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع فإن : $\vec{AM} = \vec{MC}$

$$\boxed{\vec{AM} = \vec{MC}}$$

ويمكننا أن نصل إلى نفس هذه النتيجة إذا لاحظنا أن :

$$\vec{AM} = \vec{MC} + \vec{CA} , \vec{AM} = \vec{MC} + \vec{CB}$$

وبالجمع نجد أن : $\vec{AM} = \vec{MC} + \vec{CA} + \vec{CB}$

$$\vec{AM} = \vec{MC} + \vec{CA} + \vec{CB} \therefore \vec{AM} = \vec{MC} + \vec{CA} + \vec{CB} \therefore \vec{AM} = \vec{MC} + \vec{CA} + \vec{CB}$$

وبالتالي يمكننا استنتاج الملاحظة التالية :

ملاحظة

في الشكل المقابل :

إذا كان : \vec{AM} متوسطاً في $\triangle ABC$

$$\text{فإن : } \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$



مثال ٧

أ ب ح د متوازي أضلاع ، M نقطة ما في مستويه ، N نقطة تقاطع قطريه \vec{AC} ، \vec{BD}

أثبت أن : $\vec{MN} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA})$

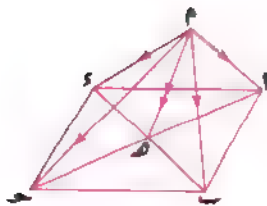
الحل .

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \vec{MA} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\text{ولكن } \vec{MA} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MD}) \text{ حيث M منتصف AC}$$

$$\therefore \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MD}) + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\therefore \vec{MN} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA})$$

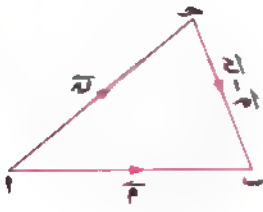


طرح متجهين هندسياً

إذا كان : \vec{a} تمثل المتجه \vec{a} ، \vec{b} تمثل المتجه \vec{b}
فإن : \vec{c} تمثل المتجه $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

أي أن : $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

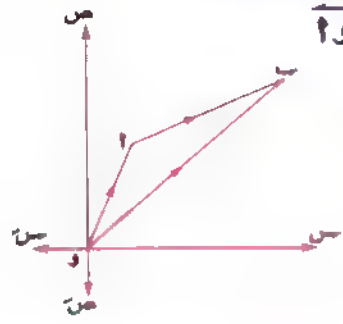
وذلك لأن $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}' = \vec{c}$



التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة \vec{ab} بدلالة متجهي الموضع لطرفيها

إذا كانت : $a(1, 2)$ ، $b(3, 5)$ فإن : $\vec{ab} = \vec{ob} - \vec{oa}$
حيث \vec{oa} ، \vec{ob} متجهي موضع للنقطتين a ، b على الترتيب.

∴ $\vec{ab} = \vec{ob} - \vec{oa}$



فمثلاً إذا كانت : $a(1, 2)$ ، $b(3, 5)$

فإن : $\vec{ab} = \vec{ob} - \vec{oa} = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$

تذكرون

عند تطبيق قاعدتي الجمع والطرح السابقين على قطعتين مستقيمتين موجهتين يجب مراعاة :



١ في حالة الجمع تكون نقطة البداية للقطعة الثانية هي نقطة النهاية للقطعة الأولى.

٢ في حالة الطرح يكون للقطعتين نفس نقطة البداية.

مثال ٨

أب ح د متوازي أضلاع فيه : $a(2, 2)$ ، $b(4, 2)$ ، $c(3, 2)$ أوجد إحداثيي النقطة د

الحل

∴ $\vec{ab} = \vec{cd}$ ∴ $\vec{d} = \vec{c} - \vec{a}$

∴ $\vec{d} = \vec{c} - \vec{a} = (3, 2) - (2, 2) = (1, 0)$ ∴ النقطة د هي $(1, 0)$

حاول بنفسك

إذا كان : $a(2, 5)$ ، $b(1, 1)$ ، $c(3, 0)$ ، $d(-3, -1)$ أوجد قيمتي : s ، t

مثال ٩

- أب ح د شبه منحرف فيه: أ (١، ١-) ، ب (٣، ٢) ، ج (١-، ٥) ، د (٥، ٥-)
 ١ إذا كان: $\overrightarrow{أب} // \overrightarrow{ح د}$ فأوجد قيمة: \angle
 ٢ أثبت أن: $\overrightarrow{ح ب} \perp \overrightarrow{أ د}$
 ٣ أوجد: مساحة شبه المنحرف أ ب ح د

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} &= (٣، ٢) - (١، ١-) = (٢، ٤) \\ \overrightarrow{ح د} &= \overrightarrow{د} - \overrightarrow{ح} = (٥، ٥-) - (١-، ٥) = (٦، ٠) \\ \therefore \overrightarrow{أب} // \overrightarrow{ح د} & \because ٠ = ١٠ \times ٢ - (٥ - ١-) \times ٤ \\ \therefore ٦ &= ٥ \quad \therefore ٢ \times ٤ = ٥ \times ٢ \quad \therefore ٢٠ = ٤ - ٤ = ٠ \end{aligned}$$

(المطلوب أولاً)

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{ح ب} &= \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ح} = (٣، ٢) - (١-، ٥) = (٤، ٢-) \\ \therefore \overrightarrow{أ د} &= \overrightarrow{د} - \overrightarrow{أ} = (٥، ٥-) - (١، ١-) = (٤، ٤-) \end{aligned}$$

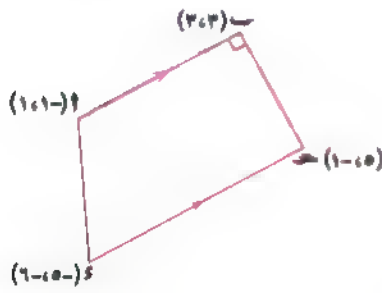
(المطلوب ثانياً)

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{ح ب} \perp \overrightarrow{أ د} & \text{ لأن: } ٠ = ٢ \times ٤ + ٤ \times (٢-) \\ \therefore \|\overrightarrow{أب}\| &= \sqrt{٢^2 + ٤^2} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥} \text{ وحدة طول.} \\ \therefore \overrightarrow{ح د} &= \overrightarrow{د} - \overrightarrow{ح} = (٥، ٥-) - (١-، ٥) = (٦، ٠) \\ \therefore \|\overrightarrow{ح د}\| &= \sqrt{٦^2 + ٠^2} = ٦ \text{ وحدة طول.} \\ \therefore \|\overrightarrow{ح ب}\| &= \sqrt{٤^2 + ٢^2} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥} \text{ وحدة طول.} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف أ ب ح د} = \frac{\|\overrightarrow{أب}\| + \|\overrightarrow{ح د}\|}{2} \times \|\overrightarrow{ح ب}\|$$

(المطلوب ثالثاً)

$$= \frac{2\sqrt{٥} + ٦}{2} \times 2\sqrt{٥} = ٣٥ \text{ وحدة مربعة.}$$

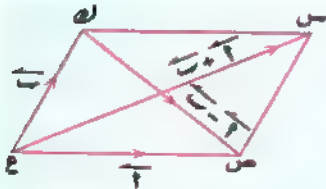


حاول بنفسك

- أ ب ح د مثلث فيه: أ (٢، ٣) ، ب (١-، ٢) ، ج (١، ٤-)
 ١ أثبت أن: $\overrightarrow{أ ب} \perp \overrightarrow{ب ج}$
 ٢ أوجد: مساحة Δ أ ب ج

ملاحظة

في الشكل المقابل:



إذا كان: \vec{a} ، \vec{b} يمثلان ضلعان متجاوران
 في متوازي الإضلاع فإن: $(\vec{a} + \vec{b})$ ، $(\vec{b} - \vec{a})$
 يمثلان قطري متوازي الأضلاع وبالتالي يكون
 $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\|$ إذا كان الشكل مستطيل أي أن $\vec{a} \perp \vec{b}$



اختبر نفسك

مستويات عليا

على العمليات على المتجهات

تذكر من أسئلة الكتاب المدرسي

تمارين

3

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كان : $\vec{a} = (2, -3)$ ، $\vec{b} = (1, 2)$ فإن : $\vec{a} - \vec{b} = \dots$
- (١) $(4, -5)$ (ب) $(-2, 4)$ (ج) $(0, 4)$ (د) $(2, -4)$
- (٢) إذا كان : $\vec{a} = (1, -5)$ ، $\vec{b} = (2, 1)$ فإن : $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \dots$
- (١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥
- (٣) إذا كان : $\vec{a} = (4, -2)$ ، $\vec{b} = (3, 5)$ فإن : $\vec{a} - \vec{b} = \dots$
- (١) $(7, -1)$ (ب) $(3, 7)$ (ج) $(7, 1)$ (د) $(7, 3)$
- (٤) إذا كان : $\vec{a} = 5\vec{s} - 6\vec{v}$ ، $\vec{b} = (1, 2)$ فإن : $\vec{a} - \vec{b} = \dots$
- (١) $4\vec{s} - 8\vec{v}$ (ب) $4\vec{s} - 8\vec{v}$ (ج) $5\vec{s} - 4\vec{v}$ (د) $8\vec{s} - 4\vec{v}$
- (٥) إذا كان : $\vec{a} = (7, 0)$ ، $\vec{b} = (5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ فإن : $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \dots$
- (١) ١٢ (ب) ١٣ (ج) ١٤ (د) $29\sqrt{2}$
- (٦) $\vec{a} - \vec{b} = \dots$
- (١) صفر (ب) $2\vec{a}$ (ج) $2\vec{b}$ (د) \vec{a}
- (٧) إذا كان : $\vec{a} = 2\vec{s} + 2\vec{v}$ ، $\vec{b} = \vec{v}$ فإن : $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \dots$
- (١) ٦ (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) ١ (د) ٥
- (٨) إذا كان : $\vec{a} = (2, 3)$ ، $\vec{b} = (-3, 5)$ فإن : $\vec{a} - \vec{b} = \dots$
- (١) $(2, 5)$ (ب) $(1, 8)$ (ج) $(5, -2)$ (د) $(5, 2)$
- (٩) إذا كان : $\vec{a} = (2, 3)$ ، $\vec{b} = (5, 6)$ فإن نقطة ح حيث $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ هي
- (١) $(3, -4)$ (ب) $(-3, -4)$ (ج) $(2, -4)$ (د) $(3, -4)$
- (١٠) إذا كان : $\vec{a} + 3\vec{b} = (5, -2)$ ، $\vec{a} = (-2, 10)$ فإن : $\vec{a} = \dots$
- (١) $(2, -1)$ (ب) $(1, -2)$ (ج) $(2, -3)$ (د) $(3, -2)$

(١١) إذا كان $\vec{a} = (2, -5)$ ، $\vec{b} = (-1, 0)$ وكان $\vec{c} = (6, k)$ وكان $\vec{a} // \vec{b}$ فإن : $k = \dots\dots\dots$

(١) $\vec{a} = (1, -1)$ (ب) $\vec{a} = (-1, 0)$ (ج) $\vec{a} = (0, 5)$ (د) $\vec{a} = (5, 0)$

(١٢) إذا كان $\vec{a} = (2, 6)$ ، $\vec{b} = (-2, 9)$ فإن $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \dots\dots\dots$

(١) $\sqrt{10}$ (ب) $\sqrt{13}$ (ج) $\sqrt{4}$ (د) $\sqrt{5}$

(١٣) إذا كانت \vec{m} منتصف \vec{ss} فإن $\vec{sm} + \vec{ms} = \dots\dots\dots$

(١) $2\vec{sm}$ (ب) \vec{ss} (ج) \vec{w} (د) \vec{ss}

(١٤) إذا كان \vec{a} حرمثًا فإن $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$

(١) \vec{w} (ب) $2\vec{a}$ (ج) $2\vec{a}$ (د) $2\vec{a}$

(١٥) إذا كان \vec{a} حرمثًا فإن $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$

(١) \vec{w} (ب) $2\vec{a}$ (ج) $2\vec{a}$ (د) $2\vec{a}$

(١٦) إذا كان \vec{a} حرمثًا رباعيًا فإن $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$

(١) $2\vec{a}$ (ب) $2\vec{a}$ (ج) $2\vec{a}$ (د) $2\vec{a}$

(١٧) إذا كان \vec{a} حرمثًا فإن $\vec{a} - \vec{b} = \dots\dots\dots$

(١) \vec{b} (ب) \vec{b} (ج) \vec{a} (د) \vec{a}

(١٨) إذا كان \vec{a} حرمثًا متوازي أضلاع فإن $\vec{a} - \vec{b} = \dots\dots\dots$

(١) \vec{c} (ب) \vec{w} (ج) $2\vec{a}$ (د) $2\vec{a}$

(١٩) أي مما يأتي يكافئ المتجه الصفري ؟

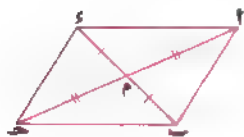
(١) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$ (ب) $\vec{c} - \vec{d} - \vec{e}$

(ج) $\vec{e} - \vec{d} - \vec{c}$ (د) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

(٢٠) \vec{a} حرمثًا متوازي أضلاع ، $\vec{a} \cap \vec{b} = \{M\}$ فإن $\vec{a} + \vec{b} = \dots\dots\dots$

(١) \vec{a} (ب) \vec{b} (ج) $2\vec{a}$ (د) $2\vec{b}$

(٢١) في الشكل المقابل :



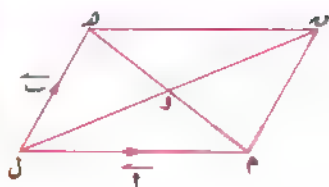
جميع العبارات التالية تعبر عن \vec{a} عدا العبارة

(١) $2\vec{a}$ (ب) $\vec{a} + \vec{c}$

(ج) $\vec{a} + \vec{b}$ (د) $\vec{b} + \vec{c}$

(٢٢) في المثلث \vec{a} : إذا كانت \vec{m} منتصف \vec{bc} فإن $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$

(١) \vec{b} (ب) $2\vec{a}$ (ج) $2\vec{a}$ (د) \vec{b}



(٢٣) في متوازي الأضلاع المرسوم أمامك

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} = \dots$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (2) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (3) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

(٢٤) إذا كان $\vec{a} + \vec{b}$ مستطيل فإن $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (2) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (3) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

(٢٥) إذا كان $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ حيث $\vec{a} = (4, 6)$ ، $\vec{b} = (3, -1)$ فإن $\vec{c} = (7, 7)$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (2) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (3) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

(٢٦) $\vec{a} + \vec{b}$ متوازي أضلاع فيه $\vec{a} = (7, -5)$ ، $\vec{b} = (4, 15)$ ، $\vec{c} = (6, 9)$

فإن نقطة \vec{d} =

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (2) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (3) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

(٢٧) إذا كان $\vec{a} + \vec{b}$ شكل خماسي فإن $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (2) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (3) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

(٢٨) إذا كان $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ فإن

$$(1) \quad \Delta \vec{a} + \vec{b} \text{ قائم الزاوية.}$$

$$(2) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

(٢٩) في الشكل المقابل :

$\vec{a} + \vec{b}$ مثلث ، إذا كانت $\vec{a} + \vec{b}$ منتصف \vec{c} ، \vec{d} منتصف \vec{e}

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} = \dots$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (2) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \\ (3) \quad & \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

(٣٠) في الشكل المقابل :

$\vec{a} + \vec{b}$ مستطيل ، \vec{c} منتصف \vec{d}

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} = \dots$$

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

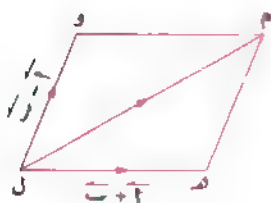
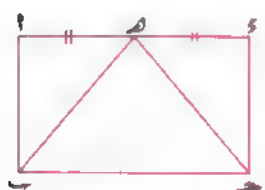
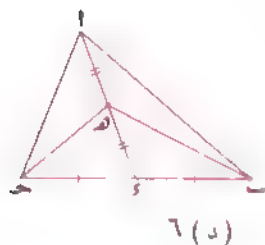
$$(2) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

(٣١) في الشكل المقابل :

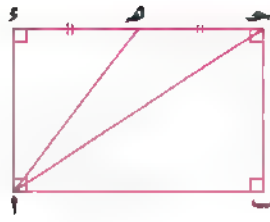
$\vec{a} + \vec{b}$ متجه يمثل

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$(2) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$



(٣٣) في الشكل المقابل :



أ ب ح د مستطيل فيه : ه منتصف ح د فإن :

أولاً : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} = \dots\dots\dots$

(أ) \overrightarrow{AB} (ب) \overrightarrow{AD}

(ج) $2\overrightarrow{AE}$ (د) \overrightarrow{AC}

ثانياً : $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$

(أ) \overrightarrow{AE} (ب) $2\overrightarrow{AB}$ (ج) \overrightarrow{AC} (د) $2\overrightarrow{AE}$

(٣٣) أ ب ح د مثلث فيه : ه \exists ب ح فإذا كان : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$

فإن : $\overrightarrow{AE} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٤) في Δ أ ب ح إذا كان : ه منتصفى أ ب ، ح على الترتيب وكان $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$

فإن : $\overrightarrow{AE} = \dots\dots\dots$

(أ) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ (ب) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

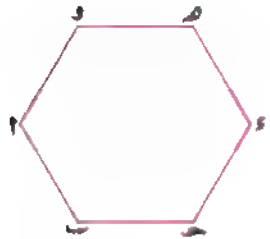
(ج) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$ (د) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$

(٣٥) أ ب ح د ه و شكل سداسى منتظم ، $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$

فإن : $\overrightarrow{AE} = \dots\dots\dots$ (بدلالة \overrightarrow{AE} ، \overrightarrow{AD} ، \overrightarrow{AE})

(أ) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (ب) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ (ج) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ (د) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

(٣٦) في الشكل المقابل :



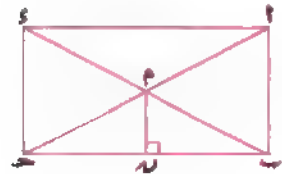
أ ب ح د ه و سداسى منتظم فإن :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \dots\dots\dots$

(أ) \overrightarrow{AE} (ب) \overrightarrow{AD}

(ج) \overrightarrow{AF} (د) \overrightarrow{AB}

(٣٧) في الشكل المقابل :



إذا كان أ ب ح د مستطيل ، $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$

فإن : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$

(أ) $2\overrightarrow{AB}$ (ب) $2\overrightarrow{AE}$

(ج) $4\overrightarrow{AE}$ (د) صفر



(٢٨) في الشكل المقابل :

أ ب ح د متوازي أضلاع فيه : و منتصف أ ب

، وكان : $\overrightarrow{AO} \cap \overrightarrow{BO} = \{O\}$

فإن : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \dots\dots\dots$

(د) $2\overrightarrow{BO}$

(ج) $2\overrightarrow{AO}$

(ب) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$

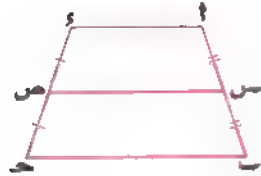
(أ) \overrightarrow{AO}

(٢٩) في الشكل المقابل :

أ ب ح د شبه منحرف

إذا كان : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CO}$

فإن قيمة : $\overrightarrow{CO} = \dots\dots\dots$ حيث $\overrightarrow{CO} \in \mathcal{C}$



(د) ٢

(ج) ١

(ب) ١-

(أ) ٢-

(٤٠) إذا كان : $\overrightarrow{AO} = (٢, ٢)$ ، $\overrightarrow{BO} = (٢, -٤)$ ، $\overrightarrow{CO} = (-٢, ٠)$ ، $\overrightarrow{DO} = (١, ٤)$

وكان : $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$ فإن : $\overrightarrow{CO} = \dots\dots\dots$

(د) ٢

(ج) $\frac{7}{3}$

(ب) ١-

(أ) ١

(٤١) إذا كان أ ب ح د متوازي أضلاع ، $\overrightarrow{AO} = (٢, ١)$ ، $\overrightarrow{BO} = (٣, -٣)$ ، $\overrightarrow{CO} = (-٣, ٥)$ ، $\overrightarrow{DO} = (-٧, ٧)$

فإن : $\overrightarrow{CO} = \dots\dots\dots$

(د) $(١٢, -١٢)$

(ج) $(٤, -٣)$

(ب) $(١٢, -١٢)$

(أ) $(٧, -٢)$

(٤٢) إذا كانت : $\overrightarrow{AO} = (٣, ٥)$ ، $\overrightarrow{BO} = (-١, ٥)$ ، $\overrightarrow{CO} = (٤, ٤)$ وحدة طول فإن : $\overrightarrow{CO} = \dots\dots\dots$

(د) ٥-

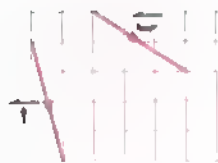
(ج) ١-

(ب) ٥

(أ) صفر

(٤٣) الشكل المقابل يمثل متجهين \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B}

أى الأشكال الآتية يمثل المتجه $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ ؟



(د)

(ج)

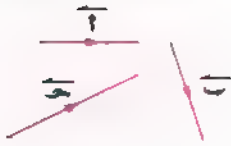
(ب)

(أ)

(٤٤) في الشكل المقابل :

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{d}$$

(حيث طول كل ضلع في شبكة المربعات يمثل وحدة الأطوال)



(ب) ٢

(١) ١

(د) ٤

(ج) ٥

(٤٥) الشكل المقابل يوضح متجهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e}

أى مما يأتى صحيح ؟

(١) $\vec{b} - \vec{c} = \vec{d}$

(ب) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(ج) $\vec{c} + \vec{b} = \vec{e}$

(د) $\vec{b} = \vec{e} + \vec{a}$



(٤٦) في الشكل المقابل ستة متوازيات أضلاع متطابقة :

إذا كان : $\vec{a} = \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{d}$ ، $\vec{e} = \vec{f}$

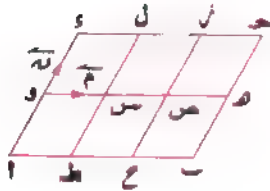
فإن : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$ (بدلالة \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c})

(١) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(ب) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$

(ج) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{e}$

(د) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{f}$



(٤٧) في الشكل المقابل :

\vec{a} و \vec{b} متوازي أضلاع \vec{c} ، \vec{d} منتصف \vec{a}

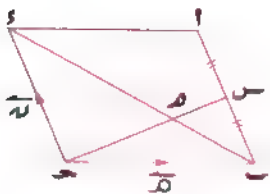
فإن : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(١) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(ب) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$

(ج) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{e}$

(د) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{f}$



(٤٨) إذا كان \vec{a} و \vec{b} متوسطين في $\Delta \vec{a} \vec{b} \vec{c}$ حيث $\vec{a} = (١, ٦)$ ، $\vec{b} = (-١, ٠)$

فإن : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ وحدة طول.

(١) $\sqrt{٢٤}$

(ب) $\sqrt{٣٤}$

(ج) $\sqrt{١٧}$

(د) $\sqrt{١٠}$

(٤٩) في الشكل المقابل :

إذا كانت \vec{d} منتصف \vec{a}

فإن : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(١) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

(ب) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$

(ج) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{e}$

(د) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{f}$



(٥٠) إذا كان \vec{AB} جزء مستطيل تقاطع قطراه في M فإن : $\vec{AM} + \vec{MB} = \dots\dots\dots$

- (١) \vec{AO} (ب) \vec{AB} (ج) \vec{AM} (د) \vec{AB}

(٥١) في الشكل المقابل :

إذا كان M نقطة تقاطع متوسطات $\triangle ABC$

فإن : $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} = \dots\dots\dots$

- (١) \vec{AO} (ب) \vec{AB} (ج) \vec{AM} (د) \vec{AB}

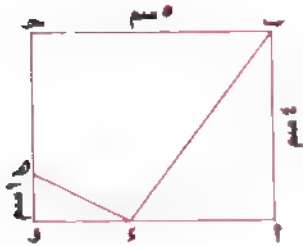


(٥٢) في الشكل المقابل :

إذا كان \vec{AB} و \vec{CD} مستطيل

فإن : $\|\vec{AC} + \vec{BD}\| = \dots\dots\dots$

- (١) $\sqrt{17}$ (ب) $\sqrt{26}$ (ج) $\sqrt{24}$ (د) $\sqrt{41}$



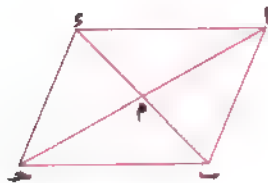
(٥٣) في الشكل المقابل :

\vec{AB} و \vec{CD} متوازي أضلاع

فإذا كان : $\vec{AC} = (7, 3)$ ، $\vec{BD} = (2, -3)$

فإن : $\vec{AD} = \dots\dots\dots$

- (١) $(5, 0)$ (ب) $(2, 3)$ (ج) $(10, 0)$ (د) $(3, 7)$



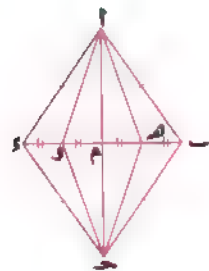
(٥٤) في الشكل المقابل :

\vec{AB} و \vec{CD} معين تقاطع قطراه في M

فإذا كان : $\vec{AM} + \vec{CM} = \vec{AO}$ ، $\vec{BO} = (\vec{AB} + \vec{CD})$

فإن : $\vec{AO} = \dots\dots\dots$

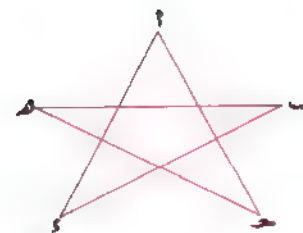
- (١) $\frac{1}{4}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (ج) 1 (د) 2



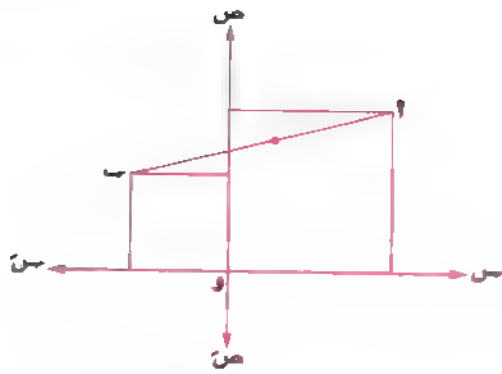
(٥٥) في الشكل المقابل :

$\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} + \vec{EO} = \dots\dots\dots$

- (١) $2\vec{AO}$ (ب) $2\vec{BO}$ (ج) $2\vec{CO}$ (د) $2\vec{DO}$



(٥٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المربع الكبير = ٤٩ وحدة مساحة

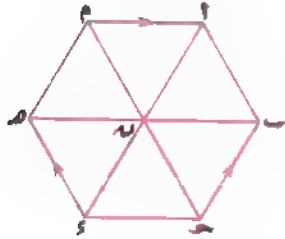
، مساحة المربع الصغير = ٢٥ وحدة مساحة

فإن : $\vec{AB} = \dots\dots\dots$

(١) $(٢, ١٢-)$ (ب) $(١٢-, ١٢-)$

(ج) $(٢-, ١٢-)$ (د) $(٢-, ١٢)$

(٥٧) في الشكل المقابل :



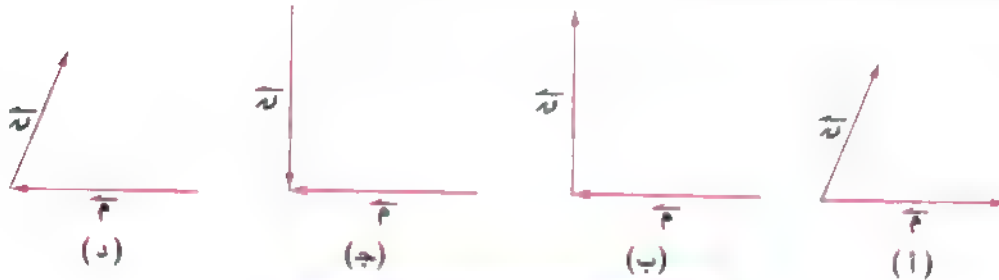
\vec{AB} و \vec{CD} متساويان منتظم طول ضلعه ٢ وحدة طولية

فإن : $\|\vec{AM} + \vec{CB} + \vec{DE}\| = \dots\dots\dots$ وحدة طول.

(١) ٢ (ب) $٢\sqrt{٣}$

(ج) $٣\sqrt{٣}$ (د) ٤

(٥٨) في أي من الحالات الآتية يكون : $\|\vec{u} + \vec{v}\| > \|\vec{u} - \vec{v}\|$ ؟



ثانياً الأسئلة المتعددة

١. \vec{AB} و \vec{CD} متوازي أضلاع حيث : $\vec{A} = (٠, ٣)$ ، $\vec{B} = (٤, ٠)$ ، $\vec{C} = (١-, ٢-)$ ، $\vec{D} = (٣, ٥-)$

أوجد : إحداثيي النقطة حـ

٢. \vec{AB} و \vec{CD} متوازي أضلاع فيه : $\vec{A} = (٢, ٣)$ ، $\vec{B} = (٨, ٣)$ ، $\vec{C} = (١, ٩)$ ، $\vec{D} = (٧, ٧)$ ، $\vec{E} = (١٠, ٨٥)$

أوجد قيم : \vec{u} ، \vec{v} ثم أوجد : $\|\vec{AB}\|$ ، $\|\vec{CD}\|$

٣. في مستوى إحداثي متعامد إذا كان : $\vec{A} = (١-, ١-)$ ، $\vec{B} = (١, ١)$ ، $\vec{C} = (١-, ٦)$ ، $\vec{D} = (١, ٦)$

أوجد كلاً من : \vec{AB} ، \vec{CD} بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ثم أثبت أن : $\vec{AB} \perp \vec{CD}$

٤. إذا كان $\vec{AB} = ٢\vec{u} + ٣\vec{v}$ ، $\vec{CD} = ٢\vec{u} - \vec{v}$ أثبت أن : $\vec{AB} = \vec{CD}$

٥. في أي مثلث \vec{u} ، \vec{v} ، \vec{w} : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$



٦ في الشكل المقابل :

أ ب ح د شكل رباعي

م \exists أ ب ، و \exists ح د ،

أثبت أن : $\overrightarrow{مب} + \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مب} = \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مب} + \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مب}$

٧ في الشكل الرباعي أ ب ح د أثبت أن :

$$(١) \overrightarrow{أح} + \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أح}$$

$$(٢) \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{أب}$$

٨ أ ب ح د شبه منحرف فيه : $\overrightarrow{أأ} // \overrightarrow{بب}$ ، م منتصف أ ب ، و منتصف ح د

أثبت أن : $\overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب} = \overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مب}$

٩ أ ب ح د شكل رباعي فيه : $\overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب}$

$$(٢) \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب} + \overrightarrow{أأ}$$

أثبت أن : (١) أ ب ح د شبه منحرف.

١٠ أ ب ح د شبه منحرف فيه : $\overrightarrow{أأ} // \overrightarrow{بب}$ ، $\frac{أأ}{بب} = \frac{٢}{٣}$ ، أثبت أن : $\overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب}$

١١ أ ب ح د شكل رباعي فيه : $\overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب}$

$$(٢) \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب} - \overrightarrow{أأ}$$

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب} + \overrightarrow{أأ}$

١٢ أ ب ح د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، م نقطة خارجة عنه

أثبت أن : (١) $\overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب} + \overrightarrow{أأ}$

$$(٢) \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{بب} - \overrightarrow{أأ}$$

$$(٣) \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ}$$

$$(٤) \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب}$$

$$(٥) \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ}$$

$$(٦) \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ}$$

١٣ أ ب ح د متوازي أضلاع فيه : م منتصف أ ب ، أثبت أن : $\overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{أأ}$

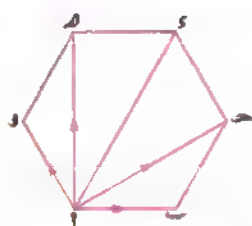
١٤ أ ب ح د شكل رباعي فيه : م منتصف أ ب ، ن منتصف ح د

أثبت أن : $\overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب} + \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب} = \overrightarrow{أأ} + \overrightarrow{بب}$

١٥ م ص ع مثلث ، ل \exists ص ع بحيث م ل : ل ع = ٥ : ٢ ، أثبت أن : $\overrightarrow{هه} + \overrightarrow{صص} + \overrightarrow{صص} = \overrightarrow{هه} + \overrightarrow{صص}$

١٦ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ح ، ط نقطة خارج المثلث

أثبت أن : $\overrightarrow{طأ} + \overrightarrow{طب} + \overrightarrow{طح} = \overrightarrow{طأ} + \overrightarrow{طب}$



٢٨ في الشكل المقابل :

أ ب ح د ه و سداسي منتظم

أثبت أن :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$$

٢٩ في مستوى إحداثي متعامد $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ ، $\overrightarrow{AC} = (-6, -4)$ ، $\overrightarrow{AD} = (-2, 6) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (11, 6)$

أوجد : (١) إحداثيي كل من النقط : أ ، ب ، ح ، د

(٢) مساحة سطح المثلث أ ب ح باستخدام المتجهات.

« ١٣ »

٣٠ أ ب ح د ه شبه منحرف فيه :

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3) ، \overrightarrow{BC} = (4, -1) ، \overrightarrow{CD} = (2, 0) ، \overrightarrow{DE} = (-1, 4) ، \overrightarrow{EA} = (5, 0)$$

(١) إذا كان : $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ أوجد قيمة : د

(٢) أثبت أن : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

(٣) أوجد : مساحة شبه المنحرف أ ب ح د ه

« ٤٠ ، ٣٠ »

ثانياً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متجهين غير صفريين فإن $\|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\| \dots \|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|$

(١) $<$ (ب) $>$ (ج) \leq (د) \geq

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$ ، $\|\overrightarrow{A}\| = \|\overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{C}\|$ فإن :

(١) \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متعامدان. (ب) \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متكافئان.

(ج) \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متوازيان. (د) \overrightarrow{C} عمودي على كل من \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B}

(٣) إذا كان : \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متجهين غير صفريين وكان $\|\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|$ فإن :

(١) $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ (ب) \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متكافئان.

(ج) \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متوازيان. (د) \overrightarrow{A} ، \overrightarrow{B} متعامدان.

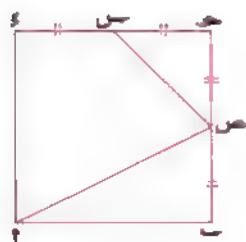
(٤) في الشكل المقابل :

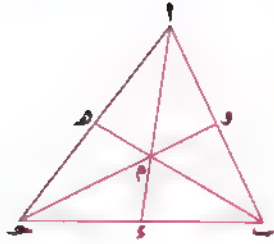
أ ب ح د مربع وكان : $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$

فإن : د =

(١) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ٤





(٥) في الشكل المقابل :

إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات $\triangle ABC$ فإن :

أولاً : $\vec{AM} = \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA} = \dots\dots\dots$

(أ) \vec{AB} (ب) صفر

(ج) $2\vec{AB}$ (د) $\vec{AB} + \vec{AC}$

ثانياً : $\vec{AM} = \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA} = \dots\dots\dots$

(أ) $\vec{AM} + \vec{BM}$ (ب) $2\vec{AM}$

(ج) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$ (د) $\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$

ثالثاً : إذا كان : $\vec{AB} + \vec{AC} = k\vec{AM}$ فإن : $k = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٦) إذا كان : $\vec{AB} = \vec{AC} = \vec{BC}$ و شكل سداسي منتظم مركزه (م) وكان : $\vec{AM} = \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA} = k\vec{AM}$

فإن : $k = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٧) إذا كان مجموع متجهي وحدة \vec{A} ، \vec{B} هو أيضاً متجه وحدة \vec{C} أي $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

فإن معيار الفرق بينهما $\|\vec{A} - \vec{B}\| = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) $3\sqrt{2}$ (د) ٢

(٨) في الشكل المقابل :

$\vec{AB} = \vec{AC}$ ، $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ ، إذا كان : $\vec{AB} = \vec{AC} = 2$

وكان : $\vec{AM} = \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA}$

فإن : $k = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) ٢ (د) ٣

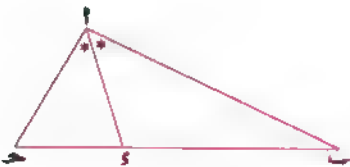
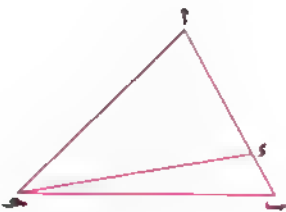
(٩) في الشكل المقابل :

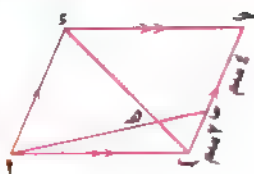
\vec{AM} ينصف \vec{BC} وكان $\vec{AB} = \vec{AC} = 2$

فإن : $k = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})$ (ب) $\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC})$

(ج) $\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC})$ (د) $\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})$





(١٠) في الشكل المقابل :

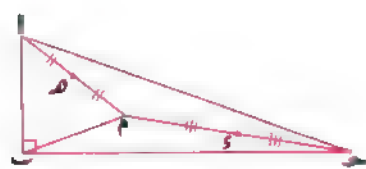
إذا كان \vec{a} و \vec{b} متوازي أضلاع فيه :

$\vec{c} = 2\vec{a}$ ، $\vec{d} = 4\vec{b}$ سم فإن : $\vec{e} = \dots\dots\dots$

(١) $\vec{e} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ (ب) $\vec{e} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{2}{4}\vec{b}$

(ج) $\vec{e} = \frac{2}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ (د) $\vec{e} = \frac{2}{4}\vec{a} + \frac{2}{4}\vec{b}$

(١١) في الشكل المقابل :



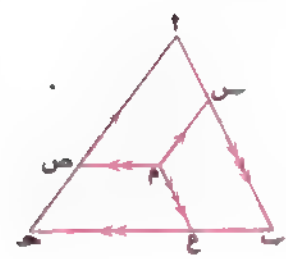
إذا كان \vec{a} و \vec{b} مثلث قائم الزاوية في \vec{c} ، $\vec{d} = 2\vec{e}$ سم

وكانت م هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث \vec{a} و \vec{b}

فإن : $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$ سم

(١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت : م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ \vec{a} و \vec{b} و \vec{c}

فإن : $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$

(١) $2\vec{c}$ (ب) $2\vec{a}$ (ج) 0 (د) $5\vec{a}$

(١) $2\vec{c}$ (ب) $2\vec{a}$ (ج) 0 (د) $5\vec{a}$

(١٣) في الشكل المقابل :



دائرة مركزها «و» ، إذا كان \vec{w} ينصف \vec{a} و \vec{b}

فإن : $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots\dots\dots$

(١) $2\vec{w}$ (ب) $2\vec{a}$ (ج) $(1 + 2\vec{w})$ (د) $3\vec{w}$

(١) $2\vec{w}$ (ب) $2\vec{a}$ (ج) $(1 + 2\vec{w})$ (د) $3\vec{w}$

٢ \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} و \vec{d} شكل رباعي ، \vec{e} ، \vec{f} ، \vec{g} ، \vec{h} منتصفات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} على الترتيب.

اثبت أن : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 2(\vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h})$

الوحدة 5

الخط المستقيم

دروس الوحدة

تسمية الخط المستقيم

1

معادلة الخط المستقيم

2

قياس الزاوية بين مستقيمين

3

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

4



نواتج التعلم

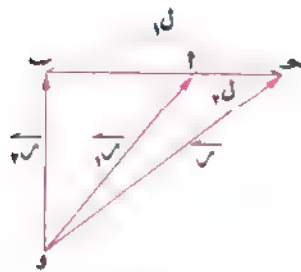
في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بدلالة الأجزاء المقطوعة من محوري الإحداثيات.
- يوجد قياس الزاوية الحادة بين مستقيمين.
- يوجد طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم.
- يوجد إحداثي نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل أو الخارج إذا علمت نسبة التقسيم.
- يوجد النسبة التي تنقسم بها قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج إذا علم إحداثيا نقطة التقسيم.
- يتعرف الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.
- يوجد المعادلة المتجهة، والمعادلات البارامترية ، والمعادلة الكارتيزية للخط المستقيم.

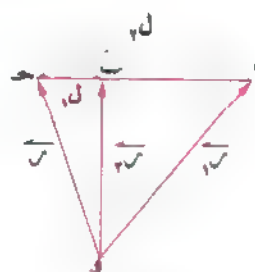
تقسيم قطعة مستقيمة



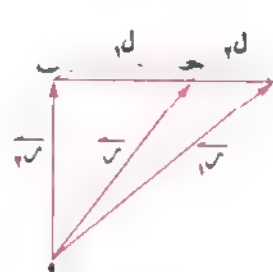
- إذا كانت : \overline{AB} قطعة مستقيمة موجهة $\Rightarrow \overline{AB}$ فإن أي نقطة $C \in \overline{AB}$ تقسم \overline{AB} إلى قطعتين مستقيمتين موجهتين \overline{AC} ، \overline{CB} بحيث $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$
- وإذا كانت النقطة C تقسم \overline{AB} بنسبة معلومة l : l وكانت $\overline{AC} = l_1$ ، $\overline{CB} = l_2$ ، $\overline{AB} = l$ هي المتجهات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة \overline{AC} ، \overline{CB} ، \overline{AB} حيث (O) هي نقطة الأصل.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

$$\therefore \overline{AC} \cdot l_1 = \overline{CB} \cdot l_2$$

$$\therefore l_1 (\overline{AC} - \overline{CB}) = l_2 (\overline{AC} - \overline{CB})$$

$$\therefore l_1 \overline{AB} + l_2 \overline{CB} = l_1 \overline{AC} + l_2 \overline{CB}$$

$$\text{فإن : } \frac{l_1}{l_2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

$$\therefore l_1 (\overline{AC} - \overline{CB}) = l_2 (\overline{AC} - \overline{CB})$$

$$\therefore l_1 \overline{AB} - l_2 \overline{CB} = l_1 \overline{AC} - l_2 \overline{CB}$$

$$\therefore \overline{AB} (l_1 + l_2) = \overline{AC} (l_1 + l_2) + \overline{CB} (l_1 + l_2)$$

وتسمى بالصورة المتجهة.

$$\therefore \overline{AB} = \frac{l_1 \overline{AC} + l_2 \overline{CB}}{l_1 + l_2}$$

١ إذا كانت : $\vec{a} \in \vec{b}$ فإن « \vec{a} تقسم \vec{b} من الداخل»

ويكون \vec{a} ، \vec{b} لهما نفس الاتجاه وتكون القيمتان λ ، μ موجبتين

أي أن $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} < 0$. [شكل (١)]

٢ إذا كانت : $\vec{a} \in \vec{b}$ ، $\vec{a} \notin \vec{b}$ فإن « \vec{a} تقسم \vec{b} من الخارج» ويكون \vec{a} ، \vec{b} لهما اتجاهان متضادان وتكون إحدى القيمتين λ ، μ موجبة والأخرى سالبة

أي أن $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} > 0$. وفي هذه الحالة يكون لدينا احتمالان :

أولاً : $|\lambda| < |\mu|$ تكون $\vec{a} \in \vec{b}$ ، $\vec{a} \notin \vec{b}$ [شكل (٢)]

ثانياً : $|\lambda| > |\mu|$ تكون $\vec{a} \notin \vec{b}$ ، $\vec{a} \notin \vec{b}$ [شكل (٣)]

$$\left| \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right| = \frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} \quad (٣)$$

$$\left| \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right| = \frac{\vec{a}}{\vec{b}} \quad \text{أي أن}$$

• إذا فرضنا أن $\vec{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ، $\vec{b} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ ، $\vec{c} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$

$$\therefore \frac{\vec{a}_1 \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \vec{b}_1}{\vec{a}_1 + \vec{a}_2} = \vec{c}$$

$$\therefore (\vec{c}_1, \vec{c}_2) = \frac{\vec{a}_1 (\vec{b}_1, \vec{b}_2) + (\vec{a}_2, \vec{a}_1) \vec{b}_2}{\vec{a}_1 + \vec{a}_2} = \frac{(\vec{a}_1 \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \vec{b}_2, \vec{a}_1 \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \vec{b}_1)}{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}$$

$$\therefore (\vec{c}_1, \vec{c}_2) = \left(\frac{\vec{a}_1 \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \vec{b}_2}{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}, \frac{\vec{a}_1 \vec{b}_2 + \vec{a}_2 \vec{b}_1}{\vec{a}_1 + \vec{a}_2} \right)$$

وتسمى بالصورة الإحداثية.

• يمكن الاستعانة بالشكل المجاور لتبسيط

إيجاد الصورة الإحداثية.



مثال ١

إذا كانت : $٢ = (١ - ٤)$ ، $٣ = (٦ ، ٦)$ أوجد إحداثيي النقطة ح التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

الحل

لاحظ أن

ح تقسم $\overline{أب}$
 $\therefore \overline{أح} = ٢ (١ - ٤)$
 $\therefore \overline{بح} = ٣ (٦ ، ٦)$

\therefore ح تقسم $\overline{أب}$ من الداخل

$$\therefore \frac{\overline{أح}}{\overline{بح}} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \frac{\overline{أح} + \overline{لح}}{\overline{بح} + \overline{لح}} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \overline{أح} = \frac{(٦ ، ٦) ٢ + (١ - ٤) ٣}{٣ + ٢} = \overline{أح} = (٢ ، ٤)$$

حل آخر باستخدام المتجهات :



\therefore ح تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢

$$\therefore \frac{\overline{أح}}{\overline{بح}} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore ٢ (١ - ٤) = ٣ (٦ - ٦) \quad \text{و منها } ٤ = ٦ - ٦$$

$$\therefore ٢ (٢ - ٦) = ٣ (٦ - ٦) \quad \text{و منها } ٢ = ٦ - ٦$$

$$\therefore ٢ (٢ - ٦) = ٣ (٦ - ٦) \quad \text{و منها } ٢ = ٦ - ٦$$

$$\therefore ٢ (٢ - ٦) = ٣ (٦ - ٦) \quad \text{و منها } ٢ = ٦ - ٦$$

$$\therefore \overline{أح} = (٢ ، ٤)$$

مثال ٢

إذا كانت : $٢ = (٢ - ٣)$ ، $٣ = (١ - ١)$ أوجد إحداثيي النقطة ح التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

الحل

لاحظ أن

ح تقسم $\overline{أب}$
 $\therefore \overline{أح} = ٣ (١ - ١)$
 $\therefore \overline{بح} = ٤ (٢ - ٣)$

\therefore ح تقسم $\overline{أب}$ من الخارج

$$\therefore \frac{\overline{أح}}{\overline{بح}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \frac{\overline{أح} + \overline{لح}}{\overline{بح} + \overline{لح}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \overline{أح} = \frac{(٢ - ٣) ٣ + (١ - ١) ٤}{٤ - ٣} = \overline{أح} = (٩ - ٥)$$

* لاحظ أننا اعتبرنا نسبة التقسيم لـ : $٤ - ٣$ ولو اعتبرناها $٤ - ٣$ فسوف نحصل على نفس النتيجة.

$$\therefore \overline{أح} = \frac{(٢ - ٣) ٤ + (١ - ١) ٣}{٤ - ٣} = \overline{أح} = (٩ - ٥)$$

∴ هو تقسيم بـ ١ من الخارج فنجد

∴ ح تقسم ب ١ من الخارج بنسبة ٤ : ٣

$$\frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2} \times 2 \therefore \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \therefore$$

$$\therefore (1-s, 1+s) \times (2-s, 2+s) = (3-s, 3+s)$$

$$\therefore (3 - 3, 3 + 3) = (4 - 4, 4 + 4)$$

∴ ۳ - ج = ۴ - ج = ۸ - ج

١٢، ٣ ص ٣ = ٤ ص ١٢ ومنها ص ٩- ∴ ح = (٥، ٩)

إذا كانت: $(1, 2) = 3$ ، $(2, 5) = 6$ وكانت: $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ بحيث: $2 = 3$ حب

فأوجد إحداثي α إذا كان: **١** التقسيم من الداخل. **٢** التقسيم من الخارج.

$$\frac{1}{x} = \left| \frac{1}{x} \right| \therefore$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \therefore 2 = 1 \therefore$$

١ إذا كان التقسيم من الداخل فإن : $\frac{2}{7} = \frac{1}{1}$

$$\left(\frac{x}{0}, \frac{y}{0}\right) = \frac{(x, 0) \gamma + (1-x, \gamma) \gamma}{\gamma + \gamma} = \frac{\sqrt{x} \sqrt{1} + \sqrt{1-x} \sqrt{1}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \sqrt{x}$$

$$\left(\frac{x}{0}, \frac{y}{0}\right) = \sqrt{x} \therefore$$

٢. إذا كان التقسيم من الخارج فإن : $\frac{2}{2} = \frac{2}{2} - = \frac{2}{2}$

$$(A, 9) = \frac{(r, 0)r + (1-r)r}{r+r} = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r}}{\sqrt{r} + \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

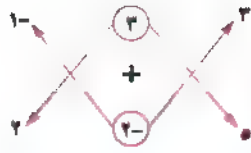
$$(A, 9) = 1 \therefore$$

• لاحظ ان : $\alpha < \beta$ او على ذلك فإن : $\alpha \in \beta$ ، $\beta \in \alpha$

$$\left(\frac{L_1 + L_2}{L_1 + L_2}, \frac{L_1 + L_2}{L_1 + L_2} \right) = 1$$

$$2:3 = 4:6, (2, 0) = 1, (1, 3) = 1$$

$$\left(\frac{x}{0}, \frac{y}{0}\right) = \left(\frac{y \times y + (1-y) \times y}{y+y}, \frac{0 \times y + y \times y}{y+y}\right) = \therefore$$



$$\begin{aligned} \overline{AB} = (1, 2) = 3, \quad \overline{AC} = 1, \quad \overline{CB} = 2 \\ \therefore \overline{AB} = (1, 2) = 3, \quad \overline{AC} = 1, \quad \overline{CB} = 2 \\ \therefore \overline{AB} = (1, 2) = 3, \quad \overline{AC} = 1, \quad \overline{CB} = 2 \end{aligned}$$

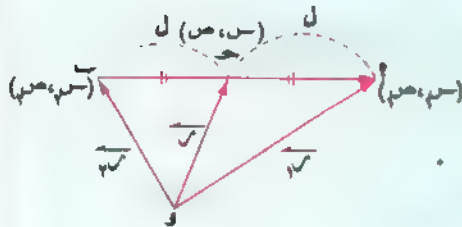
حاول بنفسك

١) التقسيم من الداخل. $\overline{AB} = (2, 1) = 3$ ، $\overline{AC} = (0, 8) = 8$ أوجد إحداثي النقطة ح التي تقسم \overline{AB} بنسبة ٤ : ٣ إذا كان :
٢) التقسيم من الخارج.

ملاحظة

إذا كانت ح منتصف \overline{AB} حيث : $\overline{AC} = (ص, ص)$ ، $\overline{CB} = (ص, ص)$

فإن : $\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{AB}$



$$\therefore \overline{AC} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{2} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{2} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\text{الصورة الإحداثية} \quad \overline{AC} = (ص, ص) = \left(\frac{ص + ص}{2}, \frac{ص + ص}{2} \right)$$

مثال ٤

إذا كانت : $\overline{AB} = (1, 4) = 5$ ، $\overline{AC} = (0, 2) = 2$ فأوجد إحداثيات النقطتين ح و د اللتين تقسمان \overline{AB} إلى ثلاثة أجزاء متساوية الطول.

الحل



$$\therefore \text{ح تقسم } \overline{AB} \text{ من الداخل بنسبة } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{(1, 4) + (0, 2)}{1 + 2} = \frac{(1, 4) + (0, 2)}{3}$$

$$\therefore \overline{AC} = (2, 1)$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{(1, 4) + (0, 2)}{2} = \frac{(1, 4) + (0, 2)}{2} = \frac{(1, 4) + (0, 2)}{2}$$

$$\therefore \text{ح و د منتصف ح ب}$$

$$\therefore \overline{AD} = (0, 2) \text{ ويمكن إيجاد د باعتبار أنها تقسم } \overline{AB} \text{ من الداخل بنسبة } \overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 2$$

مثال ٥

\overline{AB} ح و متوازي أضلاع فيه : $\overline{AC} = (2, 0) = 2$ ، $\overline{CB} = (3, 0) = 3$ ، $\overline{AD} = (1, 2) = 2$ أوجد إحداثي الرأس د

الحل

نفرض أن : $s = (حس، ص)$

، \therefore القطران ينصف كل منهما الآخر في متوازي الأضلاع.

\therefore نقطة منتصف $أح$ = نقطة منتصف $بـ$ و

$$\therefore حس = ٢$$

$$\therefore \frac{٢-٥}{٢} = \frac{٠+٢}{٢}$$

$$، \frac{١-٢}{٢} = \frac{٢+٣}{٢}$$

$$\therefore s = (٢، ٢-)$$

$$\therefore ص = ٢-$$

ملاحظات

* لإثبات أن النقط $أ، ب، ح$ تقع على استقامة واحدة فإننا نثبت :

إما $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أح}$ ، $أه \neq ٠$ (باستخدام المتجهات)

أو ميل $\overrightarrow{أب}$ = ميل $\overrightarrow{أح}$ (باستخدام الميل)

أو $أب = بـ + ح$ (باستخدام البعد بين نقطتين حيث $أب$ الطول الأكبر)

* إذا كانت $ح$ تقسم $\overrightarrow{أب}$ بنسبة $ل٢$: $ل١$ فيكون التقسيم :

١ من الداخل إذا كان $\frac{ل٢}{ل١}$ موجبة. ٢ من الخارج إذا كانت $\frac{ل٢}{ل١}$ سالبة.

مثال ٦

أثبت أن النقط : $أ = (١، ٢-)$ ، $ب = (٢٠، ٩-)$ ، $ح = (٥، ٥)$ تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

١ النسبة التي تقسم بها $ح$ القطعة $\overrightarrow{أب}$ ٢ النسبة التي تقسم بها $أ$ القطعة $\overrightarrow{بـ ح}$

الحل

$$\therefore \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{بـ ح} = \overrightarrow{أح} - \overrightarrow{أب} = (١، ٢-) - (٢٠، ٩-) = (٦-، ٣-) = (٦-، ٣-) - (٢، ١) = (٢، ١)$$

$$، \overrightarrow{أح} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بـ ح} = (١، ٢-) + (٢٠، ٩-) = (٢١، ١١) = (٢١، ١١) - (٥، ٥) = (١٦، ٦) = (١٦، ٦) - (٢، ١) = (١٤، ٥)$$

$$\therefore \overrightarrow{أح} = \frac{٤}{٣} \overrightarrow{أب}$$

\therefore $أ، ب، ح$ تقع على استقامة واحدة ، $ح$ في جهتين مختلفتين من $أ$

$$، \frac{٤}{٣} = \frac{\|\overrightarrow{أح}\|}{\|\overrightarrow{أب}\|} \text{ وينتج أن :}$$

١ $ح$ تقسم $\overrightarrow{أب}$ بنسبة $٤ : ٧$ من الخارج.

٢ $أ$ تقسم $\overrightarrow{بـ ح}$ بنسبة $٤ : ٢$ من الداخل.



حل آخر باستخدام الميل :

$$\therefore \text{ميل } \overline{AB} = \frac{2+9}{1-2} = 2 \text{ ، ميل } \overline{AC} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

$\therefore A, B, C$ ، ح تقع على استقامة واحدة.

1 نفرض أن $C(0, 0)$ تقسم \overline{AB} بنسبة $l:m$:

$$\therefore 0 = \frac{m \cdot 2 - l \cdot 1}{m + l}$$

$$\therefore m \cdot 2 - l \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2m = l$$

$$\therefore 4m = l$$

$$\therefore -\frac{4}{5} = \frac{m}{l} \text{ (سالبة)}$$

$\therefore C$ تقسم \overline{AB} بنسبة $4 : 5$ من الخارج.

2 نفرض أن $A(1, 3)$ تقسم \overline{BC} بنسبة $l:m$:

$$\therefore 1 = \frac{m \cdot 0 + l \cdot 2}{m + l}$$

$$\therefore m + l = 2m \Rightarrow l = m$$

$$\therefore 3m = 4l$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{m}{l} \text{ (موجبة)}$$

$\therefore A$ تقسم \overline{BC} بنسبة $3 : 4$ من الداخل.

حل ثالث باستخدام البعد بين نقطتين :

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} \text{ وحدة طول.}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-9)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85} \text{ وحدة طول.}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \text{ وحدة طول.}$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$$

$\therefore A, B, C$ ، ح تقع على استقامة واحدة ، $C \notin \overline{AB}$

$$\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{85}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$\therefore C$ تقسم \overline{AB} بنسبة $4 : 5$ من الخارج ، A تقسم \overline{BC} بنسبة $3 : 4$ من الداخل.

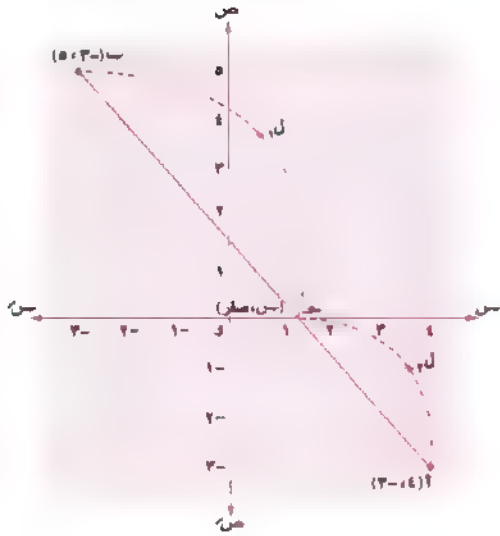


ملاحظة 7

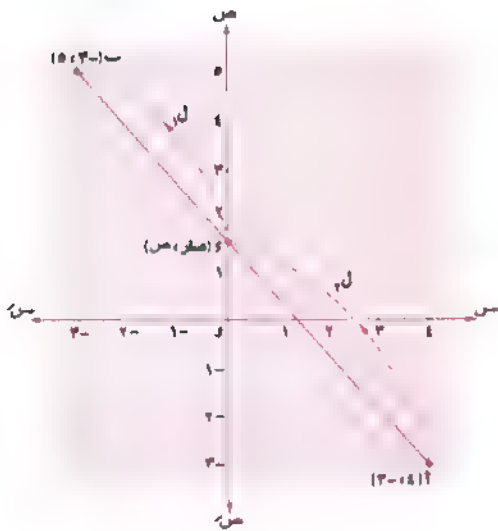
أوجد النسبة التي تنقسم بها \overline{AB} بكل من نقطتي تقاطعها مع محوري الإحداثيات

إذا كانت : $A(4, 3)$ ، $B(-2, 0)$ ثم أوجد إحداثيات نقطتي التقسيم.

الحل



$$\therefore \text{نسبة} = \frac{3 \times 3 + 4 \times 5}{5 + 3} = \frac{11}{8}$$



$$\therefore \text{نسبة} = \left(\frac{11}{8}, 0 \right) = (\text{نقطة التقسيم})$$

أولاً: بفرض أن \overline{AB} تقاطع مع محور السينات

نقطة تقاطع \overline{AB} مع محور السينات

$$\frac{(3-) \times 1 + 5 \times 1}{1 + 1} = 0 \therefore$$

$$\therefore 3 - 1 = 0 \therefore$$

$$\therefore 3 = 1 \therefore \frac{3}{5} = \frac{1}{1}$$

$\therefore \overline{AB}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع محور السينات

بنسبة 3 : 5 من الداخل.

$$\therefore \text{نسبة} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 5}{1 + 1} = 2$$

$\therefore \text{نسبة} = \left(\frac{11}{8}, 0 \right) = (\text{نقطة التقسيم})$

ثانياً: بفرض أن \overline{AB} تقاطع مع محور الصادات

نقطة تقاطع \overline{AB} مع محور الصادات

$$\frac{4 \times 1 + (3-) \times 1}{1 + 1} = 0 \therefore$$

$$\therefore 4 - 3 = 0 \therefore$$

$$\therefore 4 = 3 \therefore \frac{4}{3} = \frac{1}{1}$$

$\therefore \overline{AB}$ تنقسم بنقطة تقاطعها مع

محور الصادات بنسبة 4 : 3 من الداخل.

$$\therefore \text{نسبة} = \frac{1 \times 4 + 1 \times 3}{1 + 1} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{نسبة} = \frac{5 \times 4 + 3 \times 3}{4 + 3} = \frac{11}{7}$$

حاول بنفسك

إذا كانت : $A(2, 2)$ ، $B(1, -2)$ أوجد النسبة التي تنقسم بها \overline{AB} بنقطة تقاطعها مع محور السينات ثم أوجد إحداثي نقطة التقسيم.

مثال ٨

إذا كانت : $أ = (١ ، ٢)$ ، $ب = (٥ ، ١)$ ، $ج = (٦ ، ٣)$ رؤوس مثلث
فأوجد إحداثي نقطة تلاقي متوسطاته.

الحل

∴ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا من هذه المتوسطات من الداخل

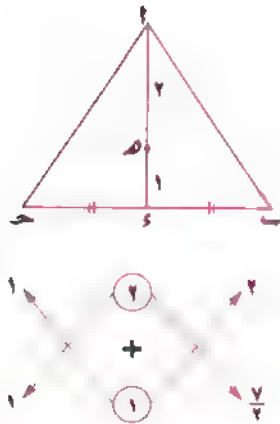
بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس ويفرض أن $د$ منتصف $بج$

$$∴ د = \left(\frac{٢+٥}{٢} ، \frac{١+٣}{٢} \right) = \left(\frac{٧}{٢} ، ٢ \right)$$

، $هـ$ (نقطة تقاطع المتوسطات) تقسم $أج$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

$$∴ هـ = \frac{٢ \times ١ + \frac{٧}{٢} \times ٢}{١ + ٢} = ٣$$

$$، ص = \frac{١ \times ١ + ١ \times ٢}{١ + ٢} = ١ ∴ هـ = (١ ، ٣)$$

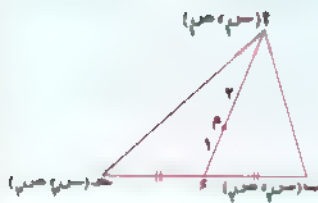


ملاحظة

إذا كان $أ$ و $ب$ مثلثاً رؤوسه $أ = (١ ص ، ١ ص)$ ، $ب = (٣ ص ، ٣ ص)$

، $ج = (٣ ص ، ٣ ص)$ ، وكانت $م$ نقطة تلاقي متوسطاته

$$فإن : م = \left(\frac{١ ص + ٣ ص + ٣ ص}{٣} ، \frac{١ ص + ٣ ص + ٣ ص}{٣} \right)$$



* يمكن حل المثال السابق كما يلي :

$$م = \left(\frac{١ ص + ٣ ص + ٣ ص}{٣} ، \frac{١ ص + ٣ ص + ٣ ص}{٣} \right) = (١ ، ٣)$$

لاحظ الفرق

إذا كانت : $أ \in \overrightarrow{أب}$ وكان :

١ $\overrightarrow{أد} = ٢ \overrightarrow{أب}$ فإن : $د$ تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل.

٢ $\overrightarrow{أد} = ٢ - \overrightarrow{أب}$ فإن : $د$ تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الخارج.

٣ $\overrightarrow{أد} = ٢ \overrightarrow{أب}$ فإن : $د$ تقسم $\overrightarrow{أب}$ من الداخل أو الخارج.



اختر نفسك

مستويات عليا

على تقسيم قطعة مستقيمة

من أسئلة الكتاب المدرس • تذكر •

تمارين

4

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كانت $4 = (3, 6)$ ، $5 = (-7, 4)$ فإن : منتصف \overline{AB} =
- (أ) $(-10, 4)$ (ب) $(5, -4)$ (ج) $(1, 5)$ (د) $(-5, 10)$
- (٢) إذا كانت : م نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ حيث : $4 = (2, 7)$ ، $3 = (-1, 1)$ فإن : م =
- (أ) $(0, 4)$ (ب) $(3, 3)$ (ج) $(0, 8)$ (د) $(6, 6)$
- (٣) إذا كانت النقطة $(3, 6)$ هي نقطة منتصف \overline{AB} حيث : $4 = (3, 7)$ فإن : النقطة B =
- (أ) $(6, -1)$ (ب) $(-6, 1)$ (ج) $(9, 5)$ (د) $(0, 6)$
- (٤) إذا كانت : ح $(2, 4)$ منتصف \overline{AB} حيث : $4 = (س, 4)$ ، $B = (1, ص)$ فإن : $س + ص$ =
- (أ) 7 (ب) 1 (ج) -1 (د) -7
- (٥) دائرة مركزها $(2, -2)$ فإذا كان قطرها له نقطة طرفية $(4, 2)$ فإن نقطة الطرف الآخر للقطر هي
- (أ) $(-4, 2)$ (ب) $(0, -6)$ (ج) $(-3, -3)$ (د) $(8, 4)$
- (٦) إذا كانت $4 = (-3, 7)$ ، $B = (4, 0)$ فإن النقطة ح التي تقسم \overline{AB} بنسبة $5 : 2$ من الداخل هي
- (أ) $(-2, 2)$ (ب) $(2, -2)$ (ج) $(2, 2)$ (د) $(-2, -2)$
- (٧) إذا كانت $4 = (2, 5)$ ، $B = (7, -1)$ فإن النقطة ح التي تقسم \overline{AB} من الخارج بنسبة $3 : 2$ هي
- (أ) $(-20, -7)$ (ب) $(20, 7)$ (ج) $(17, 13)$ (د) $(17, -13)$
- (٨) إذا كانت : $4 = (-4, 4)$ ، $5 = (5, -8)$ ، ح $\exists \overline{AB}$ بحيث ح : $4 = 1 : 2$ فإن : ح =
- (أ) $(4, -8)$ (ب) $(2, -4)$ (ج) $(-8, 4)$ (د) $(-4, 2)$

١ (٩) إذا كانت: $\exists \bar{a} \in A$ وكان $a = 4$ ، $a \in A$ ، $(4, 1) \in R$ ، $(4, 3) \in R$

فإن النقطة هي

- (٤ ، ٢) (د) (٠ ، ٤) (ج) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٠) (ا)

(١٠) إذا كانت : $\alpha = (-2, -4)$ ، $\beta = (-8, -7)$ وكانت : $\gamma \in \overrightarrow{\alpha\beta}$ ، $\delta \notin \overrightarrow{\alpha\beta}$

بحیث ۱ ح = ۲ ح ب فان : ح ف ی

- $$(1A, 13)(\mu) \quad (1A, 13)(\frac{\mu}{2}) \quad (1A, 13)(\omega) \quad (1A, 13)(\eta)$$

(١١) إذا كانت: $B(0, 3)$ ، $C(2, 0)$ وكانت A تقع في ثلث المسافة من B إلى C

فإن نقطة ١ هي

- $$(1 \leftrightarrow 2) \text{ (a)} \qquad (2 \leftrightarrow 1) \text{ (b)} \qquad (1 \leftrightarrow 2) \text{ (c)} \qquad (2 \leftrightarrow 1) \text{ (d)}$$

(١٢) إذا كانت : $A(2, 3)$ ، $B(6, 1)$ فإن النقطة ح التي تقع في ربع المسافة من A إلى B

.....

- $$(Y \in Y-) (A) \qquad (Y \in Y) (A) \qquad (Y- \in Y) (A) \qquad (Y \in Y) (1)$$

(١٣) النقطة التي تقع في $\frac{2}{3}$ المسافة من أ إلى ب للقطعة المستقيمة أ ب

.....حیث ۱ (۲، ۳) ، ب (۱-، ۵) ہی

- $$\left(\frac{y}{x} \in \frac{x}{y}\right) (\cup) \quad (1- \in \cup) (\cap) \quad \left(\frac{x}{y} \in \frac{y}{x}\right) (\cup) \quad (\cap \in 1-)(1)$$

١٤) إذا كانت ح: (٤، ٤) تقسم بـ \overrightarrow{AB} بنسبة ١ : ٢ من الداخل وكانت $P(٧، ٨)$ فإن ب =

- $$(x \in y) \quad (y \in x) \quad (y \in y) \quad (x \in x)$$

(١٥) إذا كان: $\overline{AB} = (3, 4)$ ، $\overline{AC} = (-2, 5)$ ، \overline{BC} تقسم \overline{AB} بنسبة ٣ : ٢ من الخارج

فان : ح =

- $$(1V- \in V-) (u) \qquad (r \in \wedge-) (\frac{1}{2}) \qquad (r \in \wedge) (\omega) \qquad (1V \in V) (1)$$

(١٦) النسبة التي يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة \overline{AB} حيث $A(2, 5)$ ، $B(7, -2)$

412974425641246

- (١) ٥ : ٢ من الداخل. (ب) ٢ : ٣ من الداخل. (ج) ٣ : ٢ من الخارج. (د) ٥ : ٢ من الخارج.

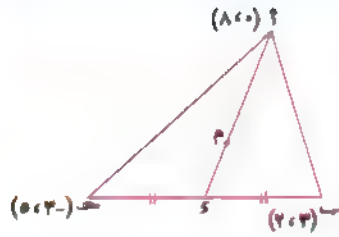
(١٧) النسبة التي يقسم بها محور الصادات \overrightarrow{AB} حيث $A(2, 5)$ ، $B(6, 7)$ تساوى

- (1) ٣ : ١ من الخارج. (ب) ٣ : ١ من الداخل. (ج) ٢ : ١ من الخارج. (د) ٢ : ٣ من الداخل.

(١٨) إذا كانت: $٢, ٥, ٥$ ، $٢, ٥$ ، $٤, ٥$ (ص) ثلاث نقاط على استقامة واحدة

فإن ح تقسم أب بنسبة

- (١) ٢ : ١ من الداخل. (ب) ٢ : ١ من الداخل. (ج) ٢ : ١ من الخارج. (د) ١ : ٢ من الخارج.



(١٩) في الشكل المقابل :

أ و متوسط في ΔABC ، م نقطة تلاقي المتوسطات

حيث $A(0,0)$ ، $B(2,3)$ ، $C(5,3)$ ، $M(2,1)$

فإن : نقطة م هي

- (١) $(7,5,0)$ (ب) $(5,0)$ (ج) $(5,3)$ (د) $(0,5)$

(٢٠) إذا كان : أ و متوسطاً في ΔABC حيث $A(2,1)$ ، $B(4,4)$ ، $C(4,2)$

فإن نقطة تلاقي متوسطات ΔABC هي

- (١) $(2,3)$ (ب) $(2,2)$ (ج) $(3,2)$ (د) $(2,2)$

(٢١) أ ب ح مثلث فيه : $A(1,3)$ ، $B(7,1)$ ، M هي نقطة تلاقي متوسطاته حيث $M(2,1)$

فإن النقطة ح هي

- (١) $(2,5)$ (ب) $(2,0)$ (ج) $(2,5)$ (د) $(2,0)$

(٢٢) أ ب ح مثلث فيه : $A(7,8)$ ، M هي نقطة تلاقي متوسطاته حيث $M(1,2)$

فإن النقطة د منتصف ب ح هي

- (١) $(2,1)$ (ب) $(1,2)$ (ج) $(2,1)$ (د) $(2,1)$

(٢٣) إذا كان : أ م متوسط في ΔABC ، م هي نقطة تقاطع متوسطات ΔABC وكانت :

$A(4,5)$ ، $M(8,7)$ فإن : $\overline{AM} = \dots$

- (١) $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ (ب) $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ (ج) $(6,2)$ (د) $(2,1)$

(٢٤) إذا كانت : ح تقسم ب أ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل فإن : $\frac{AB}{AC} = \dots$

- (١) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$

(٢٥) إذا كانت : ح تقسم ب أ بنسبة ٥ : ٧ من الخارج فإن : $\frac{AB}{AC} = \dots$

- (١) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{7}{2}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{5}{2}$

(٢٦) إذا كانت : ح \exists ب أ وكان : $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ فإن : ح تقسم ب أ بنسبة

- (١) $2:2$ (ب) $2:3$ (ج) $3:5$ (د) $5:2$

(٢٧) إذا كانت أ تقسم ب ح من الخارج بنسبة ٢ : ٣ فإن :

- (١) ب تقسم أ ح من الداخل بنسبة ٢ : ٣ (ب) ب تقسم أ ح من الداخل بنسبة ١ : ٢

- (ج) ح تقسم ب أ من الداخل بنسبة ١ : ٢ (د) ح تقسم ب أ من الخارج بنسبة ٢ : ٣

(٢٨) أ ب ح مثلث فيه : ب (٢ ، ٥) ، ح (٢- ، ٧-) ، $\overline{BC} \ni \Gamma$ ،

بحيث مساحة $\Delta \Gamma ب = \frac{1}{3}$ مساحة $\Delta \Gamma ا ب ح$ فإن $\Gamma =$

(١) (٣ ، $\frac{17}{3}$) (ب) ($\frac{2}{3}$ ، ٢) (ج) (٠ ، ١-) (د) (١ ، ١)

(٢٩) إذا كانت نقط منتصفات أضلاع مثلث هي (٢- ، ٢) ، (١- ، ٧) ، (٤ ، ٤) ،

فإن نقطة تلاقي متوسطات المثلث هي

(١) (٢ ، ٣) (ب) (٩ ، ٦) (ج) (٥ ، ٠) (د) ($\frac{5}{3}$ ، ٠)

(٣٠) النسبة التي يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة \overline{AB} حيث Γ (س ، ص) ،

ب (س_٢ ، ص_٢) هي من الداخل/الخارج حيث Γ (س ، ص) ، $0 \neq$ ، $0 \neq$ ، $0 \neq$ ،

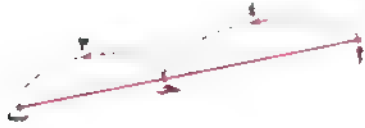
(١) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (ج) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣١) النسبة التي يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة \overline{AB} حيث Γ (س ، ص) ،

ب (س_٢ ، ص_٢) هي من الداخل/الخارج حيث Γ (س ، ص) ، $0 \neq$ ، $0 \neq$ ، $0 \neq$ ،

(١) $\frac{|س_١|}{|س_٢|}$ (ب) $\frac{|س_٢|}{|س_١|}$ (ج) $\frac{|ص_١|}{|ص_٢|}$ (د) $\frac{|ص_٢|}{|ص_١|}$

(٣٢) في الشكل المقابل :



كل مما يأتي صحيح ما عدا

(١) ح تقسم \overline{AB} بنسبة ٤ : ٢ من الداخل.

(ب) ب تقسم \overline{AB} بنسبة ٢ : ٧ من الخارج.

(ج) Γ تقسم \overline{AB} بنسبة ٤ : ٧ من الخارج.

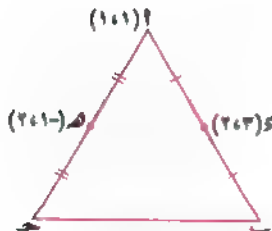
(د) ح تقسم \overline{AB} بنسبة ٢ : ٤ من الداخل.

(٣٣) إذا كانت $\Gamma \ni$ محور السينات ، $\exists \overline{BC} \ni$ وكانت النقطة ح (٢ ، ٢) تقسم \overline{AB} من

الداخل بنسبة ٢ : ٢ فإن النقطتين Γ ، ب على الترتيب هما

(١) (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣) (ب) (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤) (ج) (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥) (د) (٨ ، ٠) ، (٠ ، ١)

(٣٤) في الشكل المقابل :



إذا كانت Γ منتصف \overline{AB} ، \overline{CG} منتصف \overline{AB} ،

وكان : Γ (١ ، ١) ، Γ (٢ ، ٢) ، Γ (٢ ، ١-) ، Γ (٢ ، ١-)

فإن نقطة تلاقي متوسطات المثلث هي

(١) ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$) (ب) ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$) (ج) ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$) (د) ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}$)

و منتصف بحر ، م ۛ اب یحیث

٣ م ب = ٤ م أ فإن النقطة م هي

- $$\begin{array}{ll} (7-6) \text{ (ب)} & (7-3) \text{ (ا)} \\ (7-6) \text{ (د)} & (7-0) \text{ (ج)} \end{array}$$

١٣٦) إذا كان : ١) (س١ ، ص١) ، ٢) (س٢ ، ص٢) نقطتين في المستوى وكان محور الصادات يقسم ١) من الخارج فمن المؤكد أن

- (ا) x_1 ، x_2 موجبان.
(ب) x_1 ، x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{16} x_{17} x_{18} x_{19} x_{20} x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} x_{25} x_{26} x_{27} x_{28} x_{29} x_{30} x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} x_{35} x_{36} x_{37} x_{38} x_{39} x_{40} x_{41} x_{42} x_{43} x_{44} x_{45} x_{46} x_{47} x_{48} x_{49} x_{50} x_{51} x_{52} x_{53} x_{54} x_{55} x_{56} x_{57} x_{58} x_{59} x_{60} x_{61} x_{62} x_{63} x_{64} x_{65} x_{66} x_{67} x_{68} x_{69} x_{70} x_{71} x_{72} x_{73} x_{74} x_{75} x_{76} x_{77} x_{78} x_{79} x_{80} x_{81} x_{82} x_{83} x_{84} x_{85} x_{86} x_{87} x_{88} x_{89} x_{90} x_{91} x_{92} x_{93} x_{94} x_{95} x_{96} x_{97} x_{98} x_{99} x_{100} x_{101} x_{102} x_{103} x_{104} x_{105} x_{106} x_{107} x_{108} x_{109} x_{110} x_{111} x_{112} x_{113} x_{114} x_{115} x_{116} x_{117} x_{118} x_{119} x_{120} x_{121} x_{122} x_{123} x_{124} x_{125} x_{126} x_{127} x_{128} x_{129} x_{130} x_{131} x_{132} x_{133} x_{134} x_{135} x_{136} x_{137} x_{138} x_{139} x_{140} x_{141} x_{142} x_{143} x_{144} x_{145} x_{146} x_{147} x_{148} x_{149} x_{150} x_{151} x_{152} x_{153} x_{154} x_{155} x_{156} x_{157} x_{158} x_{159} x_{160} x_{161} x_{162} x_{163} x_{164} x_{165} x_{166} x_{167} x_{168} x_{169} x_{170} x_{171} x_{172} x_{173} x_{174} x_{175} x_{176} x_{177} x_{178} x_{179} x_{180} x_{181} x_{182} x_{183} x_{184} x_{185} x_{186} x_{187} x_{188} x_{189} x_{190} x_{191} x_{192} x_{193} x_{194} x_{195} x_{196} x_{197} x_{198} x_{199} x_{200} x_{201} x_{202} x_{203} x_{204} x_{205} x_{206} x_{207} x_{208} x_{209} x_{210} x_{211} x_{212} x_{213} x_{214} x_{215} x_{216} x_{217} x_{218} x_{219} x_{220} x_{221} x_{222} x_{223} x_{224} x_{225} x_{226} x_{227} x_{228} x_{229} x_{230} x_{231} x_{232} x_{233} x_{234} x_{235} x_{236} x_{237} x_{238} x_{239} x_{240} x_{241} x_{242} x_{243} x_{244} x_{245} x_{246} x_{247} x_{248} x_{249} x_{250} x_{251} x_{252} x_{253} x_{254} x_{255} x_{256} x_{257} x_{258} x_{259} x_{260} x_{261} x_{262} x_{263} x_{264} x_{265} x_{266} x_{267} x_{268} x_{269} x_{270} x_{271} x_{272} x_{273} x_{274} x_{275} x_{276} x_{277} x_{278} x_{279} x_{280} x_{281} x_{282} x_{283} x_{284} x_{285} x_{286} x_{287} x_{288} x_{289} x_{290} x_{291} x_{292} x_{293} x_{294} x_{295} x_{296} x_{297} x_{298} x_{299} x_{300} x_{301} x_{302} x_{303} x_{304} x_{305} x_{306} x_{307} x_{308} x_{309} x_{310} x_{311} x_{312} x_{313} x_{314} x_{315} x_{316} x_{317} x_{318} x_{319} x_{320} x_{321} x_{322} x_{323} x_{324} x_{325} x_{326} x_{327} x_{328} x_{329} x_{330} x_{331} x_{332} x_{333} x_{334} x_{335} x_{336} x_{337} x_{338} x_{339} x_{340} x_{341} x_{342} x_{343} x_{344} x_{345} x_{346} x_{347} x_{348} x_{349} x_{350} x_{351} x_{352} x_{353} x_{354} x_{355} x_{356} x_{357} x_{358} x_{359} x_{360} x_{361} x_{362} x_{363} x_{364} x_{365} x_{366} x_{367} x_{368} x_{369} x_{370} x_{371} x_{372} x_{373} x_{374} x_{375} x_{376} x_{377} x_{378} x_{379} x_{380} x_{381} x_{382} x_{383} x_{384} x_{385} x_{386} x_{387} x_{388} x_{389} x_{390} x_{391} x_{392} x_{393} x_{394} x_{395} x_{396} x_{397} x_{398} x_{399} x_{400} x_{401} x_{402} x_{403} x_{404} x_{405} x_{406} x_{407} x_{408} x_{409} x_{410} x_{411} x_{412} x_{413} x_{414} x_{415} x_{416} x_{417} $x_{$

(٣٧) إذا كانت ح منتصف \overline{AB} وكانت \overline{AC} تقسم \overline{AB} من الداخل بنسبة ٢ : ٢ فإن \overline{AC} تقسم \overline{AB} بنسبة

- $$\frac{1}{\lambda} \text{ (a)} \qquad \frac{1}{\lambda} \text{ (b)} \qquad \frac{2}{\lambda} \text{ (c)} \qquad \frac{1}{\lambda} \text{ (d)}$$

٥٧) إذا كانت النقطة ح تقسم \overline{AB} من الداخل بنسبة ٣ : ٢ ونقطة د تقسم \overline{AC} من الداخل بنسبة ١ : ٤ فإن نقطة ع تقسم \overline{AB} بنسبة

- ۱۷: ۴ (۵) ۲۲: ۲ (۳) ۸: ۱ (۵) ۶: ۱ (۱)

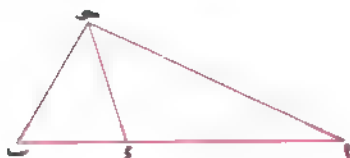
١٢٩ إذا كانت: $(ح, ص_١, ص_٢)$ و $(ص_٣, ص_٤)$ هما نقطتا تثليث $\overline{أب}$ حيث $٩(١, -٤)$ و $٦(٨, ٦)$
 فإن: $ح_١ + ح_٢ = \dots\dots\dots$

- $$\Lambda(\downarrow) \quad V(\downarrow) \quad \gamma(\downarrow) \quad \xi(1)$$

(٤٠) إذا كانت : $\uparrow (-2, 0)$ ، $\rightarrow (6, 1)$ وكانت \overrightarrow{AB} تقسم \overrightarrow{AC} من الداخل بنسبة $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ وكانت \overrightarrow{AB} تقسم \overrightarrow{AC} من الداخل بنسبة $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ وكانت \overrightarrow{AB} تقسم \overrightarrow{AC} من الداخل بنسبة $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ فان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

- (٤ ، ٠) (د) (٠ ، ٤) (ج) (٦ ، ٤) (ب) (٣ ، ٢) (ا)

(٤١) في الشكل المقابل :



ا ب ح مثلث، $\exists \overline{AB}$ حيث $\uparrow (1, -4)$ ، ب (6, 6)

و (٤، ٢)، ٩ ح = ٦ سم، ٥ ح = ٤ سم

فَإِنْ كُلُّ مِمَّا يَأْتِي صَحِيحٌ مَا عدا

- (١) مساحة $\Delta ABC = \frac{2}{3}$ مساحة ΔBCD (ب) محيط $\Delta ABC <$ محيط ΔBCD

- (ج) حو ينصف د ا ح ب

٤٢) في الشكل المقابل :



أ ب ح د متوازي أضلاع فيه :

١ (٣-، ٥-) ب (٢، ٨-) د (٦، ٨) و

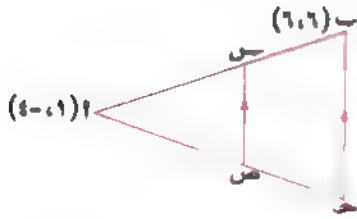
وكان : $\overline{AM} = \overline{MC}$ فإن : $M = \dots\dots\dots$

- (١) (٢-، ٣) (ب) (٣، ٥-) (ج) (٤، ٢-) (د) (١-، ٣-)

٤٣) إذا كانت نقطة الأصل على رادار مراقبة هي ميناء بحرى وتحركت منه سفينتان فى نفس الوقت الأولى نحو الشرق بسرعة ٦٠ كم/س والأخرى شمالاً بسرعة ٤٠ كم/س فإن النقطة التى تقع فى منتصف المسافة بين السفينتين بعد مرور ٢ ساعات هي «حيث كم هو وحدة الأطوال»

- (١) (٦٠، ٩٠) (ب) (٩٠، ٦٠) (ج) (١٨٠، ١٢٠) (د) (١٢٠، ١٨٠)

٤٤) في الشكل المقابل :



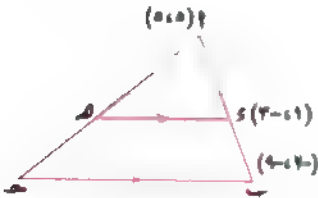
إذا كان : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

، $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$

فإن : $DE = \dots\dots\dots$

- (١) (٤، ٢) (ب) (٢، ٤) (ج) (٤، ٢-) (د) (٢، ٤-)

٤٥) في الشكل المقابل :

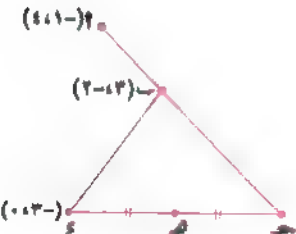


$\frac{DE}{BC} = \dots\dots\dots$

(١) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$

(ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{4}$

٤٦) في الشكل المقابل :

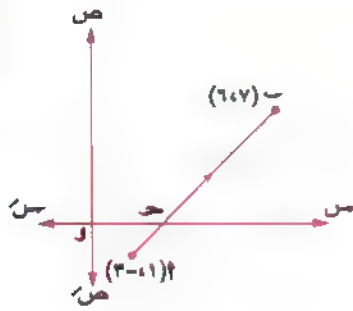


إذا كانت $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

وكان : $\overline{AD} = \overline{DB}$

فإن : $DE = \dots\dots\dots$

- (١) (٢-، ٤) (ب) (٠، ٢-) (ج) (٧-، ٤) (د) (٥-، ٨)



٤٧) في الشكل المقابل :

النقطة ح هي

(أ) $(0, 5)$

(ب) $(0, 4)$

(ج) $(0, 3)$

(د) $(0, 2)$

٤٨) في الشكل المقابل :

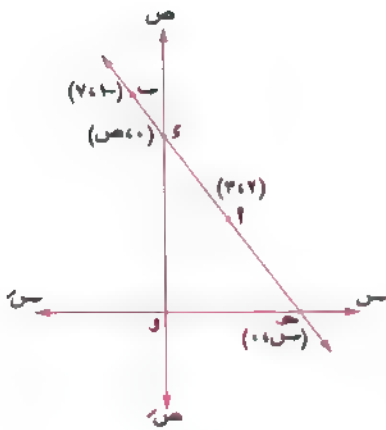
ح : أ = ح ب =

(أ) $1 : 2$

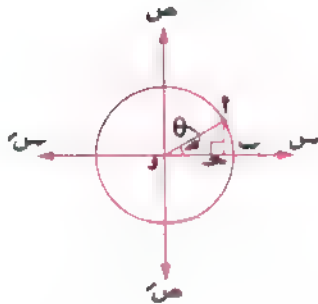
(ب) $3 : 7$

(ج) $7 : 3$

(د) $2 : 1$



٤٩) في الشكل المقابل :



زاوية θ في وضعها القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في أ

فإن \overline{OA} تنقسم ب ح من الخارج بالنسبة

(ب) ح أ

(أ) $\frac{1}{\theta - 1}$

(د) ح أ

(ج) ح أ

(٥٠) إذا كان متجه موضع النقطة أ بالصورة القطبية هو $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right)$ ، ب $(0, 2)$ ، ح $\exists \overline{AB}$

وكانت ب تنقسم أ ح بنسبة ٧ : ٤ من الخارج فإن : ح =

(أ) $(\sqrt{2}, 2)$

(ج) $(-2, 4)$

(ب) $(2, 4)$

(د) $(-2, \sqrt{2})$

الأسئلة المقالية

ثانياً

١) إذا كانت : أ $(0, -2)$ ، ب $(2, 6)$ فأوجد إحداثيي النقطة ح التي تنقسم ب أ

« (٢ ، ٢) »

من الداخل بنسبة ١ : ٢

تذكر • مهم • تطبيق • مستويات عليا

٢ إذا كانت : $٢ = (٣ ، ٢-)$ ، $ب = (١- ، ٥)$ فأوجد :

(١) إحداثي النقطة ح التي تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل.

(٢) إحداثي النقطة و التي تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٤ : ٣ من الخارج.

« $(\frac{٥}{٥} ، \frac{٧}{٥})$ ، « $(١٣- ، ٢٦)$ »

٣ أوجد إحداثي النقطة ح التي تقع عند خمس المسافة من النقطة $٢ = (١- ، ١-)$

إلى النقطة $ب = (٩ ، ٤)$

« $(١ ، ٠)$ »

٤ إذا كانت : ح $\exists \overline{أب}$ ، ح $\notin \overline{أب}$ وكانت $٢ = (٢ ، ١)$ ، $ب = (٤ ، ٢)$

وكان : ح $٢ = ٢$ أوجد إحداثي نقطة ح

« $(١- ، ١-)$ »

٥ إذا كانت : $٢ = (١ ، ٢)$ ، $ب = (٤- ، ٢-)$ أوجد إحداثي النقطة ح

إذا كانت : ح $\exists \overline{أب}$ بحيث $٢ = ٢$ ح

« $(١- ، ١-)$ »

٦ إذا كانت : $٢ = (٤ ، ٢)$ ، $ب = (٢- ، ٥)$

فأوجد ح $\exists \overline{أب}$ بحيث $٢ = ٥$ ح

« $(\frac{٧}{٨} ، \frac{٢-}{٨})$ ، « $(\frac{٧}{٨} ، ٨)$ »

٧ إذا كانت : $٢ = (٢ ، ١)$ ، $ب = (١- ، ٢-)$ فأوجد إحداثي النقطة ح $\exists \overline{أب}$

، ح $\notin \overline{أب}$ بحيث بعدها عن ٢ أربعة أمثال بعدها عن ب

« $(٢- ، ٢-)$ »

٨ إذا كانت النقطة $٢ = (٣ ، ٤-)$ ، ح $= (١- ، ل)$ ، $ب = (ل ، ١)$

على استقامة واحدة ، ح $\exists \overline{أب}$ ، $\frac{٢}{٣} = \frac{ح}{ب}$ أوجد : ل ، ل

« $٢- ، ٧-$ »

٩ إذا كانت : $٢ = (٨ ، ٤-)$ ، $ب = (١- ، ٢)$ فأوجد إحداثيات النقطتين اللتين تقسمان $\overline{أب}$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول.

« $(٢- ، ٥)$ ، « $(٠ ، ٢)$ »

١٠ إذا كانت : $٢ = (١ ، ٤-)$ ، $ب = (٥ ، ٤)$ فأوجد إحداثيات النقط ح ، و ، ه التي تقسم $\overline{أب}$

إلى أربعة أجزاء متساوية في الطول.

« $(٢ ، ٤)$ ، « $(٢- ، ٢)$ » ، « $(٠ ، ٢)$ »

١١ إذا كانت : $٢ \exists$ محور السينات ، $ب \exists$ محور الصادات ، ح $= (٣ ، ٤-)$ منتصف $\overline{أب}$

فأوجد إحداثي كل من ٢ ، ب

« $(٠ ، ٨-)$ ، « $(٦ ، ٠)$ »

١٢ إذا كانت : $٢ = (٢- ، ٢)$ ، $ب = (٢- ، ٢)$ فأوجد النسبة التي تقسم بها النقطة

ح $= (٨ ، ص)$ القطعة $\overline{أب}$ مبيئاً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص

« $١ : ٢$ (من الخارج) » ، « $٧-$ »

١٣ أوجد النسبة التي يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة \overline{AB} حيث $(2, 2) = A$ ، $(7, 3) = B$ ، مبيئاً نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم.

١٤ إذا كانت $(2, 2) = A$ ، $(4, 2) = B$ فأوجد النسبة التي يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة \overline{AB} مبيئاً نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم.

١٥ إذا كانت $(2, 5) = A$ ، $(2, 1) = B$ فأوجد النسبة التي تنقسم بها \overline{AB} بكل من نقطتي تقاطع \overleftrightarrow{AB} مع محوري الإحداثيات ، مبيئاً نوع التقسيم فى كل حالة ، ثم أوجد إحداثي نقطة التقسيم.

« ١ : ٢ (من الداخل) ، ٢ : ٥ (من الخارج) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) »

١٦ إذا كانت A ، B ونقطتي تقاطع \overleftrightarrow{AB} مع محوري الإحداثيات فأوجد النسبة التي تقسم بها كل من A ، B القطعة المستقيمة \overline{AB} مبيئاً نوع التقسيم ، علماً بأن $(5, 7) = A$ ، $(-3, 2) = B$

« ٧ : ٢ (من الخارج) ، ٥ : ٣ (من الخارج) »

١٧ إذا كانت النقط $(1, 1) = A$ ، $(-1, 1) = B$ ، $(3, 3) = C$ ، $(3, 3) = D$ هي رؤوس مثلث فأوجد إحداثي نقطة تقاطع متوسطاته.

« $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ »

١٨ إذا كانت $(4, 12) = A$ ، $(2, 10) = B$ ، $(1, 2) = C$ ، $(2, 7) = D$ ، $(2, 7) = E$ ، $(7, 2) = F$ ، M منتصف \overline{AB} ، N تقسم \overline{CD} من الخارج بنسبة ٣ : ٢ أوجد طول \overline{MN} ، 5 وحدات طول.

١٩ \overleftrightarrow{AB} متوازي أضلاع فإذا كانت $(7, 2) = A$ ، $(15, 4) = B$ ، $(9, 6) = C$ ، $(8, 2) = D$ فأوجد إحداثي نقطة تقاطع قطريه \overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{BD} ثم أوجد إحداثي الرأس E « $(1, 0)$ ، $(8, 2)$ »

٢٠ إذا كان \overleftrightarrow{AB} شكلاً رباعياً ، $(4, 3) = A$ ، $(0, 2) = B$ ، $(-2, 2) = C$ ، $(2, -2) = D$ أوجد نقطة منتصف كل من \overleftrightarrow{AC} ، \overleftrightarrow{BD} ثم حدد نوع الشكل \overleftrightarrow{AB} « $(1, 0)$ ، $(1, 0)$ ، متوازي أضلاع »

٢١ أثبت أن النقط $(1, 4) = A$ ، $(3, 2) = B$ ، $(-2, 16) = C$ تقع على استقامة واحدة ثم أوجد :

(١) النسبة التي تقسم بها \overline{AC} القطعة المستقيمة \overline{AB} ، مبيئاً نوع التقسيم.

(٢) النسبة التي تقسم بها \overline{BC} القطعة المستقيمة \overline{AB} ، مبيئاً نوع التقسيم.

(٣) النسبة التي تقسم بها \overline{AC} القطعة المستقيمة \overline{AB} ، مبيئاً نوع التقسيم.

« ٢ : ٣ (من الخارج) »

« ١ : ٢ (من الداخل) »

« ٣ : ١ (من الخارج) »

٢٢ د، هـ، م منتصفات \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{CA} على الترتيب في ΔABC

فإذا كانت: $D(2, 3)$ ، $H(1, 4)$ ، $M(4, 5)$

فأوجد إحداثيات: A ، B ، C

٢٣ $A(3, 5)$ ، $B(6, 4)$ ، $C(1, 1)$

فإذا كانت: D تقسم \overline{AB} بنسبة $1:2$ ، H تقسم \overline{AC} بنسبة $1:2$ أيضًا

فأثبت أن: $\overline{DH} \parallel \overline{BC}$ ، $\frac{DH}{BC} = \frac{1}{3}$

٢٤ الربط بالمسافة: تتحرك سيارة نقل ركاب في طريقها من المدينة A إلى المدينة B حيث $A(5, 6)$

، $B(1, 0)$ وتوقفت مرتين أثناء سيرها. أوجد إحداثيات النقطتين اللتين توقفت عندهما السيارة إذا كانت:

(١) وقفت في منتصف الطريق.

(٢) توقفت في ثلثي الطريق من جهة النقطة A

، $C(3, 3)$ ، $D(2, 5)$

ثالثًا مسائل تحسيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) في الشكل المقابل:

إذا كان: $B(5, 2)$ وحدة طول

فإن النقطة A =

(أ) $(3, 2)$ (ب) $(5, 3)$

(ج) $(4, 2)$ (د) $(5, 2)$

(٢) في الشكل المقابل:

إذا كان: $A(4, 3)$ ، $B(3, 1)$

فإن النقطة C هي

(أ) $(5, 14)$ (ب) $(4, 16)$

(ج) $(2, 20)$

(د) $(2, 21)$

(٣) في الشكل المقابل:

إذا كان: $B(3, 3)$ ، $C(4, 4)$

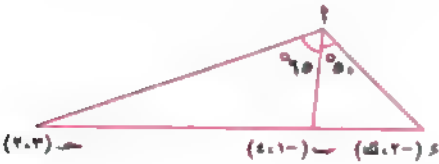
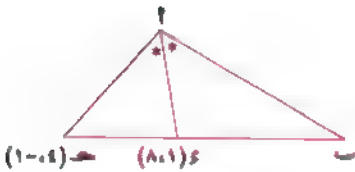
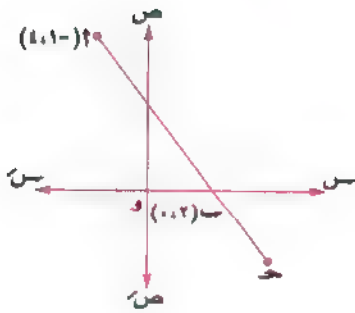
فإن: $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{5}$ =

(أ) $\frac{3}{5}$

(ب) ١

(ج) $\frac{4}{5}$

(د) $\frac{2}{5}$



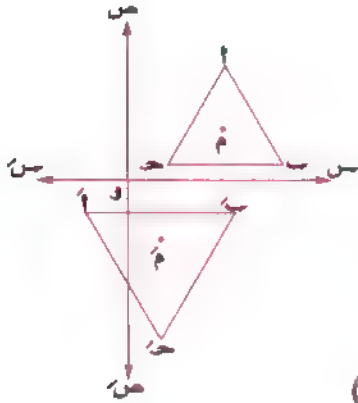
١٤ إذا كانت $أ$ ، $ب$ هما صورتا النقطة $(١، ٢)$ بالانعكاس في محور السينات والصادات على الترتيب فإن النقطة التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $٢ : ٣$ هي

- (١) $(١-، ٢)$ (ب) $(\frac{١}{٥}، \frac{٢}{٥})$ (ج) $(\frac{١}{٥}، \frac{٢-}{٥})$ (د) $(٠، ٠)$

١٥ إذا كانت النقطتان $أ$ ، $ب$ تقعان على منحنى الدالة : $ص = س^٢$ حيث $أ(٩، ٣)$ وكان محور الصادات يقسم $\overline{أب}$ بنسبة $٢ : ٣$ من الداخل فإن $ب =$

- (١) $(١-، ١-)$ (ب) $(٤، ٢-)$ (ج) $(٢، ٢٥، ١، ٥-)$ (د) $(٩، ٣-)$

١٦ في الشكل المقابل :



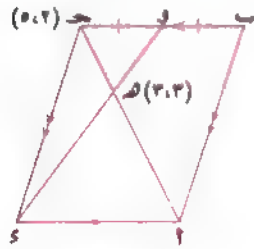
إذا كانت : $م(٢، ٣)$ نقطة تلاقي متوسطات $\Delta أ ب ح$

، $م'(٢-، ١)$ نقطة تلاقي متوسطات $\Delta أ ب ح'$

فإن : $\overrightarrow{أأ'} + \overrightarrow{بب'} + \overrightarrow{حح'} =$

- (١) $(٥، ٢)$ (ب) $(١٥، ٦)$
(ج) $(٥-، ٢-)$ (د) $(١٥-، ٦-)$

٢ في الشكل المقابل :



$أ ب ح د$ متوازي أضلاع فيه : $و$ منتصف $\overline{ب ح}$

، $\overline{أ و} \cap \overline{ب د} = \{م\}$

فإذا كانت : $م = (٢، ٣)$

، $ح = (٥، ٢)$ فأوجد إحداثيي النقطة $أ$

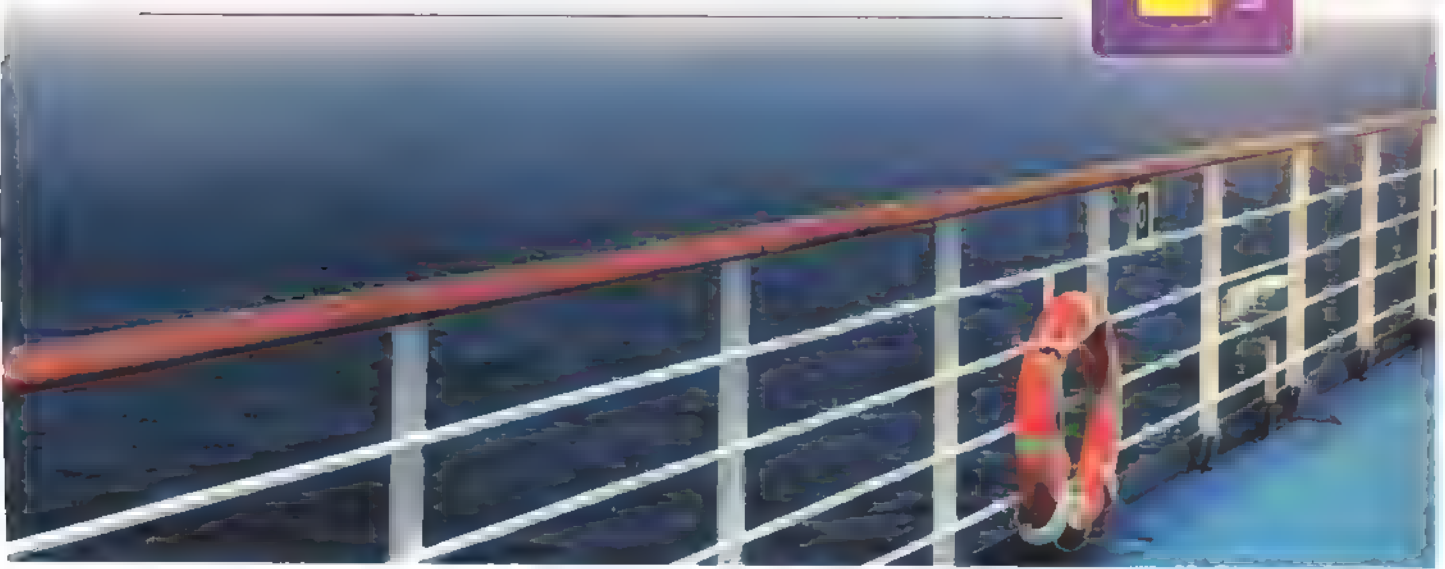
«(١-، ٥)»

٣ إذا كانت : $أ(٢، ٢)$ ، $ب(٦، ٥)$ ، $ح(٤-، ١٠-)$ هي رؤوس مثلث

، $\exists د ب ح$ بحيث $أ$ ينصف $\overline{د ب}$ من الداخل أوجد إحداثيي النقطة $د$

« $(\frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣})$ »

معادلة الخط المستقيم



درسنا في السنوات السابقة أن :

* الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي : $ax + by + c = 0$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية ، a ، b لا يساويان الصفر معاً وتمثل بيانياً بخط مستقيم
فمثلاً كل من العلاقات : $x + 3y = 6$ ، $x = 2$ ، $y = 4 - x$ ، $0 = x$ تمثل خطاً مستقيماً
، كل من العلاقتين : $x + y = 4$ ، $y = \frac{1}{x}$ لا تمثل خطاً مستقيماً.

* ميل الخط المستقيم :

١ إذا كان المستقيم L يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)

$$\text{فإن : } m \text{ (ميل المستقيم } L) = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فمثلاً المستقيم المار بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(4, 2)$ ميله يساوي $\frac{2-2}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$

٢ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : $ax + by + c = 0$

$$\text{فإن : } \text{ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$

فمثلاً المستقيم الذي معادلته : $5x + 2y + 7 = 0$ ميله $= \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

٣ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : $x = m + y$ فإن : ميله $= m$

، يقطع جزءاً من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد c ويمر بالنقطة $(0, c)$ ،

فمثلاً المستقيم الذي معادلته : $x = 3 - y$ ميله $= 3$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات 3 وحدات طولية ويمر بالنقطة $(0, -3)$

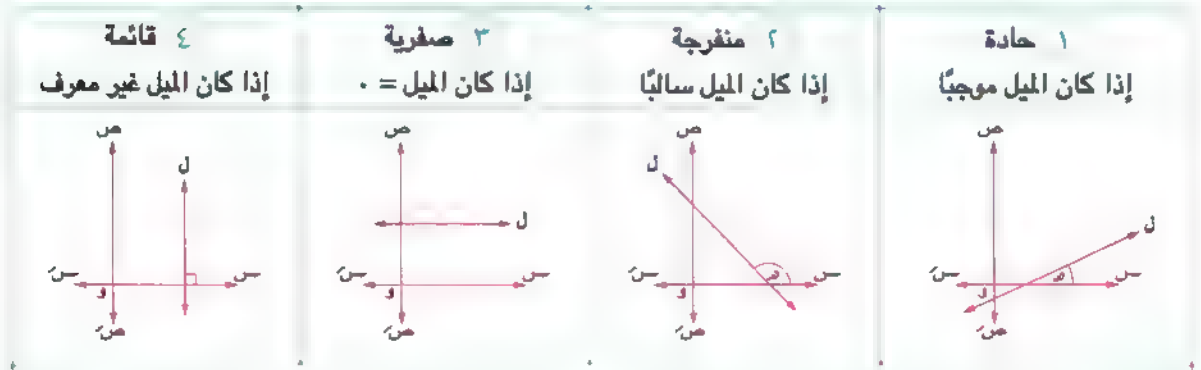
٤ إذا كان : ه قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : ميل المستقيم = ط ه

فمثلاً إذا كان قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = 45°

فإن ميل المستقيم = ط ه = 1

وبالتالي نلاحظ أن ميل الخط المستقيم يتغير بتغير قياس الزاوية (ه) كما يلي :



٥ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازي لمحور السينات) = صفر

٦ ميل محور الصادات وميل أى مستقيم رأسى (موازي لمحور الصادات) كل منهما غير معرف.

* إذا كان ميل \vec{AB} = ميل \vec{CD} فإن النقط ١ ، ٢ ، ٣ تقع على استقامة واحدة.

* العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمتعامدين :

إذا كان : ١ ، ٢ ، ٣ مستقيمين ميلاهما ١ ، ٢ ، ٣ على الترتيب فإن :

١ $\vec{AB} // \vec{CD} \iff m_1 = m_2$

أى أن المستقيمين المتوازيين ميلاهما متساويان ، والعكس صحيح.

٢ $\vec{AB} \perp \vec{CD} \iff m_1 m_2 = -1$ (ما لم يوازي أحدهما أحد المحورين)

أى أن حاصل ضرب ميلي مستقيمين متعامدين يساوى -١ ، والعكس صحيح.

فمثلاً إذا كان المستقيم L_1 يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (١- ، ٣-)

يكون ميله $m_1 = \frac{5 - 3}{3 - (-1)} = 1$

، المستقيم L_2 معادلته : $3x - 3y + 5 = 0$ يكون ميله $m_2 = \frac{3}{3} = 1$

، المستقيم L_3 يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها 135°

يكون ميله $m_3 = \tan 135^\circ = -1$

، $m_1 = m_2$ ، $\therefore L_1 // L_2$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{m} \times \vec{m} = 1 - 1 = 0, \quad \therefore \vec{m} \perp \vec{m} \\ \therefore \vec{m} \times \vec{m} = 1 - 1 = 0, \quad \therefore \vec{m} \perp \vec{m} \end{aligned}$$

* أى نقطتين مختلفتين فى المستوى يمر بهما خط مستقيم واحد ، ومن أى نقطة خارج هذا المستقيم يمكن رسم مستقيم آخر وحيد يوازيه.

* لتحديد معادلة أى خط مستقيم فإنه يلزمنا معرفة معلومتين عن هذا المستقيم كأن نعرف نقطتين عليه ، أو نقطة عليه وميله ، أو ما شابه ذلك كما سيتضح فيما يلى من شرح.

تعريف متجه اتجاه المستقيم

هو متجه غير صفري يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم.

* فى الشكل المقابل :



كل من \overrightarrow{SM} ، \overrightarrow{SE} ، \overrightarrow{ES} ، \overrightarrow{MS}

هو متجه اتجاه للخط المستقيم ل

* إذا كان : $\vec{u} \neq \vec{v}$ ، $\vec{u} // \vec{v}$ المستقيم ل فإن : \vec{u} متجه اتجاه المستقيم ل

* إذا كان : $\vec{u} = \vec{v}$ (\vec{u} ، \vec{v}) متجه اتجاه المستقيم.

فإن : \vec{u} متجه اتجاه لنفس المستقيم حيث $\vec{u} \in \vec{L}$

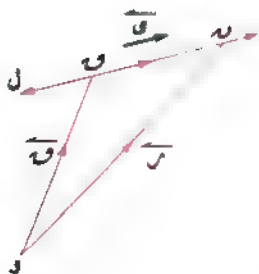
فمثلاً إذا كان : $\vec{u} = (2, 4)$ متجه اتجاه مستقيم ما فإن كلاً من المتجهات $(6, 8)$ ، $(-2, -4)$ ، $(1, 2)$ ، $(5, 10)$ ، ... متجه اتجاه لهذا المستقيم.

ملاحظة

إذا كان : $\vec{u} = (2, 4)$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم $= \frac{4}{2}$ ، والعكس صحيح.

فمثلاً إذا كان : $\vec{u} = (2, -2)$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم $= \frac{-2}{2}$ ، المستقيم الذى ميله $= \frac{4}{-2}$ يكون المتجه $\vec{u} = (7, -4)$ متجه اتجاه له.

الصورة المعادلة لمتجه الخط المستقيم



* إذا كان ل مستقيماً يمر بالنقطة Q ، \vec{u} متجه اتجاه له وبفرض

نقطة R تقع على المستقيم ل وأن $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ ، $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ هما المتجهان

الممثلان بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين \vec{u} و \vec{v} ، \vec{u} على الترتيب

* يوجد عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ، $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$

$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$ وتسمى هذه الصورة «المعادلة المتجهة للخط المستقيم»

حيث λ عدد حقيقى ويسمى بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر λ يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

* بفرض $U = (u, v)$ ، $V = (v_1, v_2)$ ، $\vec{U} = (1, 1)$

∴ معادلة الخط المستقيم هي : $(u, v) = (v_1, v_2) + (1, 1)k$

$$\therefore \begin{cases} u = v_1 + k \\ v = v_2 + k \end{cases}$$

وتسمى هذه الصورة «المعادلات الوسيطة (البارامترية)»

$$\therefore \frac{u - v_1}{1} = \frac{v - v_2}{1} \quad , \quad \frac{u - v_1}{1} = \frac{v - v_2}{1}$$

$$\text{وبحذف } k \text{ من المعادلتين : } \therefore \frac{u - v_1}{1} = \frac{v - v_2}{1}$$

$$\therefore \frac{u - v_1}{1} = \frac{v - v_2}{1} \quad , \quad \frac{u - v_1}{1} = \frac{v - v_2}{1}$$

∴ الميل $m = \frac{v - v_2}{u - v_1}$

وتسمى هذه الصورة «المعادلة الكارتيزية»

نلخص ما سبق فيما يلي :

المستقيم l الذي يمر بالنقطة $U = (u, v)$ والمتجه $\vec{U} = (1, 1)$ متجه اتجاه له تكون :

المعادلة المتجهة هي : $\vec{r} = \vec{U} + k\vec{U}$

أي أن $(u, v) = (v_1, v_2) + (1, 1)k$

المعادلتان الوسيطيتان هما : $\begin{cases} u = v_1 + k \\ v = v_2 + k \end{cases}$

المعادلة الكارتيزية هي : $m = \frac{v - v_2}{u - v_1}$

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة

$U = (3, -2)$ والمتجه $\vec{U} = (-2, 1)$ متجه اتجاه له.

الحل :

* المعادلة المتجهة للمستقيم هي : $\vec{r} = \vec{U} + k\vec{U}$ ∴ $(x, y) = (-2, 1) + k(-2, 1)$

أي أن $(x, y) = (-2, 1) + (-2, 1)k$

* المعادلتان الوسيطيتان هما : $\begin{cases} x = -2 - 2k \\ y = 1 + k \end{cases}$

* المعادلة الكارتيزية هي : $\frac{x + 2}{-2} = \frac{y - 1}{1}$

$$\therefore x + 2 = -2(y - 1)$$

∴ الصورة العامة هي : $x + 2y - 4 = 0$

تذكرون !

∴ $(-2, 1)$ متجه اتجاه للمستقيم

∴ ميل المستقيم $-\frac{1}{2}$

حل آخر لإيجاد المعادلة الكارتيزية :

يحذف θ من المعادلتين الوسيطيتين

$$\therefore \frac{y-2}{x-1} = \frac{y+3}{x-4}$$

$$\boxed{\text{أي أن } x + y + 1 = 0}$$

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1)$ وميله $-\frac{4}{5}$

الحل

\therefore الميل $m = -\frac{4}{5}$ \therefore المتجه $\vec{u} = (5, -4)$ متجه اتجاه لهذا المستقيم.

* المعادلة المتجهة هي : $\vec{r} = (-2, 1) + \theta(5, -4)$

$$\boxed{\text{أي أن } (x, y) = (-2, 1) + \theta(5, -4)}$$

* المعادلتان الوسيطيتان هما : $x = -2 + 5\theta$ ، $y = 1 - 4\theta$

* المعادلة الكارتيزية هي : $-\frac{4}{5} = \frac{y-1}{x+2}$ \therefore الصورة العامة هي : $4x + 5y + 3 = 0$

حاول بنفسك

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(1, 4)$ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$

معادلة المستقيم بدلالة نقطتين معلومتين : $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x, y)$

المتجه $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0)$ متجه اتجاه للمستقيم.

\therefore المعادلة المتجهة هي : $\vec{r} = \vec{r_0} + \theta(\vec{u})$

، \therefore الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ وبالتعويض عن الميل في الصورة الكارتيزية.

$$\therefore \text{المعادلة الكارتيزية هي : } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

مثال ٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين : $(3, -1)$ ، $(-2, 4)$

الحل

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = (1, -2) - (4, -1) = (-3, -1) = (3, 1) \text{ متجه اتجاه المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{1}{5} \vec{v} = \frac{1}{5} (3, 1) = (0.6, 0.2) \text{ متجه اتجاه أيضاً للمستقيم ، ميل المستقيم } = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة هي : } \vec{r} = \vec{u} + \vec{v} \quad \therefore \vec{r} = (3, 1) + (0.6, 0.2) = (3.6, 1.2)$$

$$\text{أي أن : } (x, y) = (3.6, 1.2) + (0.6, 0.2)$$

$$\text{، المعادلتان الوسيطيتان هما : } x = 3.6 + 0.6t, \quad y = 1.2 + 0.2t$$

$$\text{، المعادلة الكارتيزية هي : } y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$\text{أي أن : } x + y = 3$$

$$\therefore \text{الصورة العامة هي : } x + y - 3 = 0$$

ملاحظات

١) معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل و (0, 0) هي :

$$\bullet \text{ المعادلة المتجهة : } \vec{r} = \vec{u} \quad \text{حيث } \vec{u} \text{ متجه اتجاه له.}$$

$$\bullet \text{ المعادلة الكارتيزية : } y = mx \quad \text{حيث } m \text{ ميل المستقيم.}$$

٢) متجه اتجاه المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة (3, 1) هو $\vec{u} = (3, 1)$

٣) المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (3, 1) يكون المتجه

$$\vec{u} = (1, 0) \text{ متجه اتجاه له.}$$

$$\text{، معادلته المتجهة : } \vec{r} = (3, 1) + t(1, 0)$$

$$\text{، معادلته الكارتيزية : } y = 1 \quad \text{أي أن } y = 1$$

٤) المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (3, 1)

$$\text{يكون المتجه } \vec{u} = (0, 1) \text{ متجه اتجاه له.}$$

$$\text{، معادلته المتجهة : } \vec{r} = (3, 1) + t(0, 1)$$

$$\text{، معادلته الكارتيزية : } x = 3 \quad \text{أي أن } x = 3 \text{ (غير معرف)}$$

$$٥) \text{ معادلة محور السينات هي : } y = 0 \text{ أو } \vec{r} = t(1, 0)$$

$$٦) \text{ معادلة محور الصادات هي : } x = 0 \text{ أو } \vec{r} = t(0, 1)$$

مثال ٤

أوجد الصورة المتجهة والكارتيزية للخط المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل والنقطة $Q = (5, -3)$

الحل

∴ المستقيم يمر بنقطة الأصل.

∴ ميل المستقيم $\frac{0}{3} = 0$

∴ المعادلة المتجهة هي: $\vec{r} = \vec{0} + t\vec{u}$ ∴ $\vec{r} = t(5, -3)$

∴ المعادلة الكارتيزية هي: $x = 5t$ و $y = -3t$

∴ $\frac{y}{x} = \frac{-3t}{5t} = -\frac{3}{5}$ ∴ $5y = -3x$ ∴ $3x + 5y = 0$

متجه اتجاه العمودى على المستقيم

* إذا كان: $\vec{u} = (a, b)$ متجه اتجاه مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التي على الصورة $\vec{v} = (b, -a)$

حيث $\vec{v} \perp \vec{u}$ يكون متجه اتجاه العمودى على المتجه \vec{u}

* إذا كان: $\vec{u} = (a, b)$ عموديًا على خط مستقيم فإن أيًا من عائلة المتجهات التي على الصورة

$\vec{v} = (b, -a)$ حيث $\vec{v} \perp \vec{u}$ يكون متجه اتجاه المستقيم.

فمثلاً إذا كان: $\vec{u} = (5, -3)$ متجه اتجاه مستقيم فإن متجه اتجاه العمودى عليه هو:

$(3, 5), (-3, -5), (5, -3), (-5, 3), \dots$

مثال ٥

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم L الذي يمر بالنقطة $Q = (2, -3)$ وعمودى على المتجه $\vec{u} = (4, 1)$

الحل

∴ $\vec{u} = (4, 1)$ عمودى على المستقيم L ∴ $\vec{u} = (4, 1)$ متجه اتجاه للمستقيم L

∴ المعادلة المتجهة هي: $\vec{r} = \vec{Q} + t\vec{u}$ ∴ $\vec{r} = (2, -3) + t(4, 1)$

أى أن $(x, y) = (2, -3) + t(4, 1)$

∴ المعادلتان الوسيطيتان هما: $x = 2 + 4t$ و $y = -3 + t$

∴ المعادلة الكارتيزية هي: $\frac{y+3}{1} = \frac{x-2}{4}$

أى أن $4(y+3) = x-2$ ∴ $4y+12 = x-2$ ∴ $x-4y-14 = 0$

∴ الصورة العامة هي: $x-4y-14 = 0$

ملاحظة

إذا كانت المعادلة العامة للمستقيم هي : $ax + by + c = 0$ فإن :

* المتجه $\vec{r} = (a, b)$ = (معامل x ، معامل y) هو متجه عمودي على المستقيم.

* المتجه $\vec{s} = (b, -a)$ هو متجه اتجاه لهذا المستقيم.

فمثلاً المستقيم الذى معادلته : $2x + 3y + 7 = 0$ يكون :

المتجه $\vec{r} = (2, 3)$ هو متجه عمودي عليه ، المتجه $\vec{s} = (3, -2)$ هو متجه اتجاه له.

مثال ٦

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : $3x - 2y + 12 = 0$

الحل

∴ المستقيم : $3x - 2y + 12 = 0$

∴ المتجه $\vec{r} = (3, -2)$ متجه عمودي عليه. ∴ المتجه $\vec{s} = (2, 3)$ متجه اتجاه له.

وللحصول على الصورة المتجهة لمعادلة هذا المستقيم نبحث عن أى نقطة يمر بها وذلك بأن نعطي x (أو y) أى قيمة ونوجد قيمة y (أو x) المناظرة.

فبوضع $x = 0$ نجد أن : $-2y + 12 = 0$ ∴ $y = 6$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(0, 6)$ ∴ معادلته المتجهة هي : $\vec{r} = (6, 0) + (2, 3)$

حاول بنفسك

أوجد المعادلة المتجهة والكارتيزية للمستقيم الذى يمر بالنقطة $(-4, 1)$ والمتجه $(3, 6)$ عمودي عليه.

معادلة المستقيم بمعلومية ميله (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

∴ المستقيم ميله (م) ويقطع محور الصادات فى النقطة $(0, c)$

أى أنه يقطع جزءاً من محور الصادات طوله القيمة المطلقة للعدد c

وبالتعويض فى الصورة الكارتيزية نجد أن : $\frac{y - c}{-m} = \frac{x}{1}$

أى أن : $mx + y = c$

معادلة المستقيم بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة $(a, 0)$ ، محور الصادات فى النقطة $(0, b)$

∴ ميل المستقيم (م) $= \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a}$

وبالتعويض في الصورة الكارتيزية :

$$\begin{aligned} \therefore \frac{ص}{ب} &= \frac{ص - ١}{١ - ب} \\ \therefore ١ - ب &= ص - ١ \quad \text{وبالقسمة على } ١ - ب \\ \therefore ١ - ب &= ص - ١ \quad \text{وبالقسمة على } ١ - ب \\ \therefore ١ &= \frac{ص}{ب} + \frac{ب}{١} \end{aligned}$$

مثال ٧

أوجد المعادلة العامة لكل مما يأتي :

- ١) المستقيم ل، الذي ميله ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٧ وحدات طولية.
- ٢) المستقيم ل، الذي يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات.

الحل

$$\begin{aligned} \text{١) معادلة المستقيم ل، هي : } ص &= م س + ح \\ \therefore ٧ - ٣ &= ص \\ \text{٢) معادلة المستقيم ل، هي : } ١ &= \frac{ص}{ب} + \frac{ب}{١} \\ \text{أي } ٢ - ٤ &= ص - ١٢ \end{aligned}$$

حاول بنفسك

أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بالمستقيم : $٣ س + ٨ ص - ٢٤ = ٠$

ملاحظات

* **المعادلة :** $١ - ب = ص - ١$ حيث $١ = ٠$ ، $ب$ لا يساويان الصفر معًا تسمى بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

$$\text{١) إذا كان : } ١ = ٠ ، ب \neq ٠ \quad \text{فإن : } ١ - ب = ص - ١ \quad \text{أي أن : } \frac{ص}{ب} = ١$$

وهي معادلة مستقيم موازى لمحور السينات ويمر بالنقطة $(٠ ، ١)$

$$\text{٢) إذا كان : } ١ \neq ٠ ، ب = ٠ \quad \text{فإن : } ١ - ب = ص - ١ \quad \text{أي أن : } \frac{ص}{ب} = ١$$

وهي معادلة مستقيم موازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(٠ ، ١)$

$$\text{٣) إذا كان : } ١ = ٠ ، ب = ٠ \quad \text{فإن : } ١ - ب = ص - ١ \quad \text{أي أن : } ١ = ٠$$

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل.

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع $ص = ٠$

* لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع $س = ٠$

مثال ٨

أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها الخط المستقيم : $3x - 2 + y = 6$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم أوجد إحداثيات نقطتي تقاطعه مع محوري الإحداثيات.

الحل

∴ ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$
∴ الميل السالب.

$$\therefore \text{طا ه} = \frac{2}{3}$$

∴ الزاوية منفرجة.

$$\therefore \text{و (د ه)} = 180^\circ - 56^\circ 19' = 123^\circ 41'$$

$$\therefore 3x - 2 + y = 6$$

∴ نقطة التقاطع هي (٠ ، ٣)

$$\therefore 3x - 2 + y = 6$$

∴ نقطة التقاطع هي (٢ ، ٠)

∴ قياس الزاوية الحادة التي ظلها $\frac{2}{3}$ هو $56^\circ 19'$

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع $x = 0$

$$\therefore y = 3$$

ولإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع $y = 0$

$$\therefore x = 2$$

حل آخر لإيجاد نقطتي التقاطع مع محوري الإحداثيات :

$$\therefore 3x - 2 + y = 6$$

$$\therefore 3x - 2 + y = 6 \text{ بالقسمة على } 3$$

$$\therefore 1 = \frac{x}{3} + \frac{y-2}{3}$$

∴ المستقيم يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ٠) ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣)

مثال ٩

أثبت أن النقط : $أ = (4, -3)$ ، $ب = (-7, 6)$ ، $ج = (5, -4)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{أب} = \frac{3+7}{4-6} = -1 \text{ ، ميل } \overrightarrow{بج} = \frac{6-4}{-7-5} = -1$$

∴ النقط أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة.

$$\text{حل آخر : } \therefore \text{معادلة } \overrightarrow{أب} \text{ هي : } 1 - \frac{3+7}{4-6} = \frac{3+7}{4-6} \text{ أي } 1 - \frac{3+7}{4-6} = 1$$

$$\therefore \text{النقطة } ب = (-7, 6) \text{ تحقق المعادلة.} \therefore ب \in \overrightarrow{أب}$$

∴ أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة.

مثال ١٠

أوجد المعادلة العامة لكل من المستقيمات الآتية :

$$1 \text{ المستقيم ل، الذي يمر بالنقطة } (3, -1) \text{ وميله } = \frac{3}{4}$$

- ٢ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطة $(\sqrt{2}, 4)$ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها 120°
- ٣ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطة $(-2, -5)$ والمتجه $\vec{u} = (2, 1)$ متجه اتجاه له.
- ٤ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطة $(4, -2)$ والعمودي على المتجه $\vec{v} = (-1, 5)$
- ٥ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطة $(-3, 7)$ ويوازي محور السينات.
- ٦ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطتين $(4, -2)$ ، $(5, 2)$
- ٧ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطة $(1, 2)$ موازيًا للمستقيم : $2x + 3y - 6 = 0$
- ٨ المستقيم لـ الذي يمر بالنقطة $(2, 2)$ عموديًا على المستقيم الذي ميله $\frac{5}{3}$

الحل

١ معادلة المستقيم لـ هي : $\frac{3}{4} - = \frac{1 + \text{ص}}{3 - \text{س}}$ **أي** $0 = 5 - \text{ص} + 4 - \text{س}$

٢ ميل المستقيم لـ = $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

معادلة المستقيم لـ هي : $\frac{3}{4} - = \frac{\text{ص} - \sqrt{3}}{4 - \text{س}}$ **أي** $0 = \text{ص} - \sqrt{3} + 3 - \text{س}$

٣ ميل المستقيم لـ = $\frac{1}{3}$

معادلة المستقيم لـ هي : $\frac{1}{3} = \frac{5 + \text{ص}}{4 + \text{س}}$ **أي** $0 = 13 - \text{ص} - 3 - \text{س}$

٤ المتجه $\vec{u} = (1, 5)$ متجه اتجاه للمستقيم لـ ميله = $\frac{1}{5}$

معادلة المستقيم لـ هي : $\frac{1}{5} = \frac{2 + \text{ص}}{4 - \text{س}}$ **أي** $0 = 14 - \text{ص} - 5 - \text{س}$

٥ معادلة المستقيم لـ هي : $7 = \text{ص}$ **أي** $0 = 7 - \text{ص}$

٦ ميل المستقيم لـ = $\frac{2 + 3}{4 - 5} = 5$

معادلة المستقيم لـ هي : $5 = \frac{2 + \text{ص}}{4 - \text{س}}$ **أي** $0 = 22 - \text{ص} - 5 - \text{س}$

٧ ميل المستقيم المعطى = $\frac{2}{3}$ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{2}{3}$

معادلته هي : $\frac{2}{3} = \frac{2 - \text{ص}}{1 - \text{س}}$ **أي** $0 = 8 - \text{ص} + 2 - \text{س}$

٨ ميل المستقيم المعطى = $\frac{5}{3}$ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{5}{3}$

معادلته هي : $\frac{5}{3} = \frac{2 - \text{ص}}{2 - \text{س}}$ **أي** $0 = 19 - \text{ص} + 5 - \text{س}$

مثال ١١

أ ب ح مثلث له وسطه النقطة : $ق = (-1, 0)$ ، $ب = (4, -2)$ ، $ح = (-3, 0)$.
أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس ق عمودياً على $\overline{ب ح}$

الحل



$$\therefore \overrightarrow{ب ح} = \overrightarrow{ق ح} - \overrightarrow{ق ب} = (-2, 0) - (-5, -2) = (3, 2)$$

، \therefore المتجه $\overrightarrow{ب ح} = (3, 2)$ عمودى على المستقيم ل

\therefore المتجه $\overrightarrow{ق ح} = (2, 3)$ متجه اتجاه المستقيم ل

\therefore ميل المستقيم $= \frac{3}{2}$

، \therefore المستقيم يمر بالنقطة $ق = (-1, 0)$

$$\therefore$$
 معادلة المستقيم هي : $\frac{3}{2} = \frac{0 - ص}{1 + س}$ $\therefore 3 = 2 + 7س - 10$

$$\boxed{\text{أى } 7س - 2 = 17 = 0}$$

مثال ١٢

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(1, 3)$ وميله سالب والذي يصنع مع محوري الإحداثيات مثلثاً مساحته ٦ وحدات مربعة.

الحل

نفرض أن المستقيم يقطع محور السينات فى $(ق, 0)$

، الصادات فى $(0, ب)$

\therefore معادلته تكون على الصورة : $1 = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{ق}$

، $\therefore (1, 3)$ نقطة على المستقيم.

$$\therefore 1 = \frac{3}{ب} + \frac{1}{ق}$$

$$\therefore ب = 3ق + 3 \quad (1)$$

، \therefore مساحة المثلث $= 6$ وحدات مربعة.

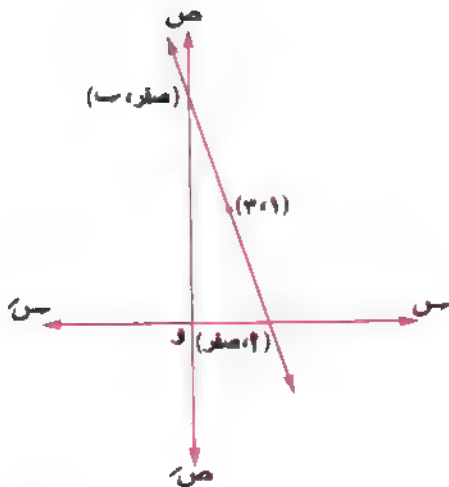
$$\therefore 6 = \frac{1}{2} ب ق$$

$$\therefore 12 = ب ق \quad (2)$$

بالتعويض من (٢) فى (١) :

$$\therefore 12 = 3ق + 3$$

$$\therefore 9 = 3ق$$



وبالتعويض في (٢) :

$$\begin{array}{lll} \bullet = 12 + 112 - 212 \therefore & 12 = 212 - 112 \therefore & 12 = (12 - 12)1 \therefore \\ 7 = 1 \text{ ومنها } 2 = 1 \therefore & \bullet = 2(2 - 1) \therefore & \bullet = 2 + 12 - 21 \therefore \end{array}$$

∴ معادلة المستقيم هي : $1 = \frac{x}{6} + \frac{y}{2}$ **أى** $6 = x + 3y$

مثالی ۱۲

أوجد مسقط النقطة $P(0, 0)$ على المستقيم $l: 2x - y + 3 = 0$

ثم أوجد صورة النقطة A بالانعكاس في نفس المستقيم.

الحل

بفرض نقطة B هي مسقط النقطة A على المستقيم l

∴ معادلة المستقيم ل هي $2x - y + 5 = 0$ (١)

∴ ميل المستقيم $l = -2$

$\therefore \frac{1}{4} = \overrightarrow{AB}$ میل

∴ معادلة آب هي $\frac{1}{2} = \frac{0 - 5}{5 - 5}$

(٢) أي أن : ج - ٢ ص = ٥

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : \therefore ح = ٣ ، ص = ١ -

$$(1 - \epsilon^2) = 1 \therefore$$

أي أن : مسقط النقطة ٢ على المستقيم ٢-س+ص=٥ هي النقطة ب= (٢، -١)

إيجاد \uparrow (ح، ع) صورة \uparrow (هـ، و) بالانعكاس في المستقيم ل

$$(1, 3) = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{3+0}{2} \right) \therefore \text{بمنتصف}$$

$$(r-1) = 1 \therefore r = 2 \quad r = 5 \quad 1 = 1 \therefore$$

ملاحظات

ميل المستقيم الذي يصنع مع محوري الإحداثيات مثلثًا متساوي الساقين يساوي ١ أو ١-

مساحة المثلث الذي يصنعه المستقيم $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$ مع محوري الإحداثيات يساوي $\frac{1}{2} \times 1 \times 1$ وحدة مربعة.



اختر نفسك

على معادلة الخط المستقيم

تمارين

5

مستويات عليا

مستويات عليا

مستويات عليا

مستويات عليا

مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- (١) إذا كانت : $4(2, -2)$ ، $3(5, 6)$ فإن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$
- (١) -1 (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) 4 (د) 1
- (٢) ميل المستقيم الذي معادلته : $2x - 3y + 5 = 0$ يساوي $\dots\dots\dots$
- (١) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{2}{4}$ (د) $\frac{2}{7}$
- (٣) المستقيم المار بالنقطتين $(4, -2)$ ، $(5, 2)$ يكون ميل المستقيم العمودي عليه $\dots\dots\dots$
- (١) 5 (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) -5 (د) $\frac{1}{5}$
- (٤) إذا كان ميل المستقيم : $(2 + 4x) - 3x + 2 = 0$ يساوي 2 فإن : $4 = \dots\dots\dots$
- (١) 1 (ب) -1 (ج) $\frac{5}{3}$ (د) $\frac{1}{3} -$
- (٥) إذا كان المستقيم : $4x - 5y + 5 = 0$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها 50° ، فإن : $4 = \dots\dots\dots$
- (١) $\frac{16}{3}$ (ب) $3-$ (ج) $\frac{16}{3}$ (د) 3
- (٦) إذا كانت النقط : $(1, 8)$ ، $(3, 2)$ ، $(9, -4)$ تقع على استقامة واحدة فإن $x = \dots\dots\dots$
- (١) 11 (ب) 5 (ج) $11-$ (د) $5-$
- (٧) إذا توازى المستقيم المار بالنقطتين $(3, 0)$ ، $(0, 2)$ والمستقيم $4x - 3y = \dots\dots\dots$ فإن : $4 = \dots\dots\dots$
- (١) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{4}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{2}{7}$
- (٨) إذا كان المستقيمان : $3x - 2y + 7 = 0$ ، $4x + 3y + 5 = 0$ متعامدين فإن : $4 = \dots\dots\dots$
- (١) 1 (ب) 2 (ج) $2-$ (د) $1-$
- (٩) ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة جيب تمامها $\frac{4}{5}$ هو $\dots\dots\dots$
- (١) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$
- (١٠) المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون متجه اتجاهه $= \dots\dots\dots$
- (١) $(0, 1)$ (ب) $(1, 0)$ (ج) $(-1, 1)$ (د) $(1, 1)$

- (١١) المستقيم الذي معادلته $\frac{x}{4} + y = 5$ يكون متجه اتجاهه =
 (أ) (٤ ، ٥) (ب) (٥ ، ٤) (ج) (٤ ، -٥) (د) (٥ ، -٤)
- (١٢) المستقيم : $4x + 3y = 0$ له متجه اتجاه هو
 (أ) (١ ، ٤) (ب) (٤ ، -١) (ج) (٣ ، ٤) (د) (٤ ، -٣)
- (١٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) هو ...
 (أ) $2 - \frac{1}{2}$ (ب) $4 - 2$ (ج) $2 + 4$ (د) $4 - 2$
- (١٤) إذا كان : $\vec{u} = (2, -5)$ متجه اتجاه لمستقيم ما فإن جميع المتجهات التالية تكون متجهات اتجاه لنفس المستقيم ما عدا المتجه
 (أ) (٢ ، -٥) (ب) (٦ ، -١٥) (ج) (٢ ، ٥) (د) (-١ ، ٥ ، ٢)
- (١٥) إذا كان : $\vec{u} = (1, \frac{1}{4})$ متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودية على المستقيم عدا المتجه
 (أ) (١ ، $\frac{1}{4}$) (ب) (٢ ، -١) (ج) (١ - $\frac{1}{4}$) (د) (٤ ، -٢)
- (١٦) إذا كان ميل المستقيم $\frac{3}{4}$ فإن متجه اتجاهه يكون
 (أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (ج) (٦ ، -٤) (د) كل ما سبق صحيح.
- (١٧) إذا كان : (٦ ، ٤) ، (٢ ، ٣) متجهي اتجاه لمستقيمين متعامدين فإن : $m = \dots$
 (أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$
- (١٨) متجه اتجاه المستقيم العمودي على محور الصادات يمكن أن يكون ...
 (أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (ج) (١ ، ١) (د) (١ ، -١)
- (١٩) كل من العلاقات الآتية تمثل خطأ مستقيماً ما عدا
 (أ) $5x = 2y$ (ب) $5x = 0$ (ج) $1 = \frac{x}{4} + \frac{y}{5}$ (د) $5x = 2y$
- (٢٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٣) هي
 (أ) $3x + 4y = 12$ (ب) $4x + 3y = 20$ (ج) $3x - 4y = 0$ (د) $3x - 4y = 7$
- (٢١) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، -٣) ويوازي محور السينات هي
 (أ) $0 = 2 + x$ (ب) $0 = 3 + x$ (ج) $0 = 2 - x$ (د) $0 = 3 - x$
- (٢٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٧) ويوازي محور الصادات هي
 (أ) $2 = x$ (ب) $2 = y$ (ج) $7 = x$ (د) $2 = y$

(٢٣) معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها 45° ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات مقداره ٥ وحدات هي

$$(١) \text{ ص } = -٥ \quad (ب) \text{ ص } = \frac{١}{٢} + ٥$$

$$(ج) \text{ ص } = \frac{١}{٢} + ٥ \quad (د) \text{ ص } = ٥$$

(٢٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٣, -٢)$ عمودياً على المستقيم ٧ هي

$$(١) \text{ ص } = ٣ \quad (ب) \text{ ص } = ٧ \quad (ج) \text{ ص } = -٢ \quad (د) \text{ ص } = ٧$$

(٢٥) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السيني والصادي جزأين موجبين مقدارهما

$٢, ٣$ على الترتيب هي

$$(١) \text{ ص } = ٢ + ٣ = ٥ \quad (ب) \text{ ص } = ٢ + ٣ = ٥$$

$$(ج) \text{ ص } = ٢ + ٣ = ٥ \quad (د) \text{ ص } = ٢ + ٣ = ٥$$

(٢٦) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة $(٣, -٤)$ ومتجه الاتجاه له $(٢, ٥)$ هي

$$(١) \vec{r} = (٢, ٥) + \lambda (٣, -٤) \quad (ب) \vec{r} = (٣, -٤) + \lambda (٢, ٥)$$

$$(ج) \vec{r} = (٣, -٤) + \lambda (٢, ٥) \quad (د) \vec{r} = (٢, ٥) + \lambda (٣, -٤)$$

(٢٧) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة $(١, ٢)$ هي

$$(١) \vec{r} = \lambda (١, ٢) \quad (ب) \vec{r} = \lambda (١, ٢)$$

$$(ج) \vec{r} = (١, ٢) + \lambda (٠, ١) \quad (د) \vec{r} = (١, ٢) + \lambda (١, ٠)$$

(٢٨) الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ويوازي المستقيم الذى معادلته :

$$\vec{r} = (٢, -٥) + \lambda (٣, ٤) \text{ هي }$$

$$(١) \text{ ص } = ٥ + ٣ \quad (ب) \text{ ص } = ٣ - ٥ = -٢$$

$$(ج) \text{ ص } = ٥ - ٣ = ٢ \quad (د) \text{ ص } = ٣ - ٥ = -٢$$

(٢٩) المعادلة المتجهة لمحور السينات هي

$$(١) \vec{r} = (١, ١) + \lambda (٠, ٠) \quad (ب) \vec{r} = (٠, ١) + \lambda (١, ١)$$

$$(ج) \vec{r} = (٠, ١) \quad (د) \vec{r} = (١, ٠)$$

(٣٠) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة $(٣, ٥)$ ويوازي محور السينات هي

$$(١) \vec{r} = (٣, ٥) \quad (ب) \vec{r} = (٥, ٣) + \lambda (٠, ٠)$$

$$(ج) \vec{r} = (٥, ٣) + \lambda (٠, ١) \quad (د) \vec{r} = (٠, ١) + \lambda (٥, ٣)$$

(٣١) جميع المعادلات الآتية تمثل معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(٠, ٣)$ ، $(٢, ٠)$ ما عدا المعادلة

$$(١) \vec{r} = (٠, ٣) + \lambda (٢, -٣) \quad (ب) \vec{r} = (٢, ٠) + \lambda (٢, -٣)$$

$$(ج) \vec{r} = (٠, ٣) + \lambda (٢, ٢) \quad (د) \vec{r} = (٢, ٠) + \lambda (٢, -٤)$$

(٣٢) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٥ ، ٠) ومتجه الاتجاه له (٤ ، ١-) هما ..

(أ) $s - 1 = x$ ، $s = y$ ، $5 = x + 4$ (ب) $s = x$ ، $s = y$ ، $5 = x + 4$

(ج) $s = x + 5$ ، $s = y$ ، $s = -$ (د) $s = -$ ، $s = y$ ، $5 = x + 4$

(٣٣) المعادلتان البارامتريتان للمستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب محور السينات زاوية موجبة قياسها

5° ويمر بالنقطة (٣ ، -٥) هما ..

(أ) $s = x + 3$ ، $s = y - 5$ (ب) $s = x + 3$ ، $s = y + 5$

(ج) $s = x + 1 + 2$ ، $s = y - 1 - 5$ (د) $s = x - 1 + 3$ ، $s = y + 1 + 5$

(٣٤) المستقيم ل : $s = x - 1$ ، $s = y + 1$ يمر بالنقطة ..

(أ) (١ ، ١) (ب) (١ ، -١) (ج) (-١ ، -١) (د) (-١ ، ١)

(٣٥) المستقيم الذي معادلته المتجهة هي $\vec{r} = (2, -1) + s$ يكون متجه اتجاه العمودى

عليه ..

(أ) (٣ ، -٥) (ب) (٢ ، -١) (ج) (٥ ، ٣) (د) (-٥ ، ٣)

(٣٦) إذا كان المستقيمان : $4 = x + y + z$ ، $0 = 9 + x + y + z$ متوازيين

فإن : $z =$..

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٣٧) إذا مر مستقيم بالنقطة (٢ ، ١) وكان المتجه $\vec{r} = (1, 3)$ عمودياً عليه فإن معادلة المستقيم

هي ..

(أ) $s + 2 = x$ ، $s = y$ (ب) $s + 2 = x$ ، $s = y - 5$

(ج) $s - 2 = x$ ، $s = y$ (د) $s - 2 = x$ ، $s = y - 5$

(٣٨) المستقيم العمودى على المستقيم $\vec{r} = (0, 5) + s$ يمر بالنقطة (١ ، ٣) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات زاوية قياسها

(أ) 30° (ب) 60° (ج) 120° (د) 150°

(٣٩) المستقيم : $\vec{r} = (1, 4) + s$ يوازي

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(ج) المستقيم $s = x$ (د) المستقيم $s = y$

(٤٠) مساحة المثلث المحدد بمحور السينات ومحور الصادات والمستقيم $s + 2 = x$ ، $6 = y$

تساوى وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ١٢

(٤١) أى النقط الآتية تقع على المستقيم $\vec{r} = (-2, 1) + s$ ، $s = (3, -4)$ ؟

(أ) $(2, \frac{5}{3})$ (ب) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (ج) $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ (د) $(2, \frac{7}{3})$

(٤٢) النقطة التي تقع على المستقيم : $س = ١ - ٢ ل$ ، $ص = ٣ - ل$ والتي إحداثيتها السيني $٣ =$ هي

- (١) (١ ، ٣) (ب) (٢ ، ١-) (ج) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٢)

(٤٣) طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم . $٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠$ هو وحدة طول.

- (١) ٣ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٦

(٤٤) إذا كانت الصورة البارامترية لمعادلة مستقيم هي $س = ٦ + ٣ ل$ ، $ص = ١ - ٢ ل$ فإن ميل هذا المستقيم =

- (١) $\frac{1}{٦}$ (ب) ٦ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٤٥) المستقيمان $١ = \frac{ص}{١} + \frac{س}{١-}$ ، $١ = \frac{ص}{١} + \frac{س}{١-}$ يكونان

- (١) متوازيان. (ب) متقاطعان ومتعامدان.

(ج) متقاطعان وغير متعامدان. (د) يتقاطعان في النقطة (١ ، ٠)

(٤٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) عمودياً على المستقيم $س + ٢ ص = ١١$ هي

- (١) $س - ٢ ص + ١٢ = ٠$ (ب) $س - ٢ ص - ١٢ = ٠$

- (ج) $س - ٢ ص - ١٤ = ٠$ (د) $س - ٢ ص + ١٤ = ٠$

(٤٧) إذا كانت المعادلة البارامترية للمستقيم \vec{AB} هي $س = ٤ ل - ١$ ، $ص = ٤$

فإن ميل المستقيم العمودي على \vec{AB} يساوي

- (١) $١ - \frac{1}{٤}$ (ب) صفر. (ج) ١ (د) غير معرف.

(٤٨) إذا كانت معادلتا المستقيمين الذين يحملان قطري متوازي الأضلاع AB هما $س + ٣ ص = ٤$

، $٦ س - ٢ ص = ٧$ فإن الشكل AB يجب أن يكون

- (١) مستطيل. (ب) مربع. (ج) رباعي دائري. (د) معين.

(٤٩) إذا كان \overline{AE} متوسط في ΔABC الذي فيه $A(٢ ، ٢)$ ، $B(٦ ، ١)$ ، $C(٧ ، ٣)$

فإن معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) موازياً لـ \overline{AE} هي

- (١) $٢ س - ٩ ص - ٧ = ٠$ (ب) $٢ س - ٩ ص - ١١ = ٠$

- (ج) $٢ س + ٩ ص - ١١ = ٠$ (د) $٢ س + ٩ ص + ٧ = ٠$

(٥٠) معادلة محور تماثل \overline{AB} حيث $A(٢ ، ١-)$ ، $B(٤ ، ٣)$ هي .

- (١) $س + ٢ ص = ٥$ (ب) $س + ٢ ص = ٥$

- (ج) $٢ س - ص = ٥$ (د) $٢ س - ص = ٥$

(٥١) إذا كانت النقطة (٤ ، ٦) هي منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها على محوري الإحداثيات فإن معادلة الخط المستقيم الذي يحمل هذه القطعة هي

(١) $٢س + ٢ص = ٢٤$ (ب) $٢س - ٢ص = ١٠$

(ج) $٤س + ٦ص = ٥٢$ (د) $٢س - ٢ص = ٠$

(٥٢) إذا كانت : ٢ (١ ، ٢) ، ٣ (١ ، ٢) فإن معادلة المستقيم الذي يقسم \overline{AB} بنسبة ٢ : ١ من الداخل على التعمد هي

(١) $٤س + ٢ص = ٥$ (ب) $٤س + ٢ص = ١٥$

(ج) $٨س + ٤ص = ٥$ (د) $٨س + ٤ص = ١٥$

(٥٣) إذا كانت النقطة (٤- ، ٥) إحدى رؤوس مربع ، أحد قطريه يقع على المستقيم $٧س - ٨ص = ٠$ فإن معادلة القطر الآخر هي

(١) $٣س + ٢ص = ١١$ (ب) $٢س - ٢ص = ٢٣$

(ج) $٧س + ٢ص = ٢١$ (د) $٢س + ٢ص = ٧$

(٥٤) إذا كان المستقيم : ٢س + ٣ص = ١٢ يقطع جزءًا موجبًا من محور السينات طوله ٦ وحدات ، وجزءًا سالبًا من محور الصادات طوله ٤ وحدات فإن : ٢س + ٣ص =

(١) ٨ (ب) ٤ (ج) ٤- (د) ٢-

(٥٥) معادلة الخط المستقيم الذي يقع على بعدين متساويين من المستقيمين $٢س = ٢$ ، $١٠ص =$ هي

(١) $٨ص =$ (ب) $٤ص =$ (ج) $٤س =$ (د) $١٢س =$

(٥٦) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ح (٢ ، ٤) ويقطع الجزئين الموجبين لمحوري الإحداثيات السيني والصادي في النقطتين ٩ ، ٣ على الترتيب بحيث ٩ ح : ح ب = ٢ : ٢ هي

(١) $٢س + ٢ص = ١٠$ (ب) $٢س + ٢ص = ١٠$

(ج) $٢س + ٥ص =$ (د) $١٠س + ١٠ص =$

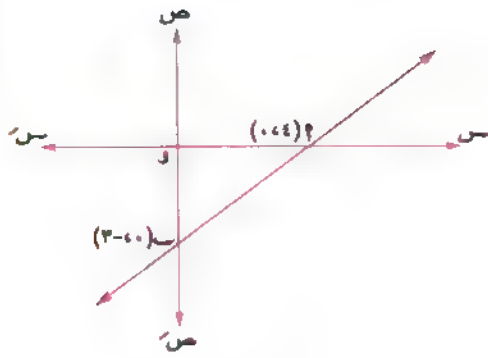
(٥٧) مساحة المثلث المحدد بالمستقيم المار بالنقطة ٢ (٢ ، ٣) وميله $\frac{١}{٣}$ ومحوري الإحداثيات تساوى وحدة مربعة.

(١) ٢ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

(٥٨) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٣) ويقطع من محوري الإحداثيات جزءين مجموعهما ١- هي

(١) $١ = \frac{ص}{٣} - \frac{س}{٢}$ ، $١ = \frac{ص}{١} + \frac{س}{٢}$ (ب) $١ = \frac{ص}{٣} + \frac{س}{٢}$ ، $١ = \frac{ص}{١} + \frac{س}{٢}$

(ج) $١ = \frac{ص}{٣} - \frac{س}{٢}$ ، $١ = \frac{ص}{١} + \frac{س}{٢}$ (د) $١ = \frac{ص}{٣} + \frac{س}{٢}$ ، $١ = \frac{ص}{١} + \frac{س}{٢}$



(٥٩) في الشكل المقابل :

معادلة \overleftrightarrow{AB} هي

(أ) $١٢ = ٤س + ٢ص$

(ب) $١٢ = ٢س + ٤ص$

(ج) $١٢ = ٣س - ٤ص$

(د) $١٢ = ٣س - ٤ص$

(٦٠) في الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overline{AB} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

فإن معادلة المستقيم \overleftrightarrow{AB} هي

(أ) $١ = \frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢}$

(ب) $١ = \frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢}$

(ج) $١ = \frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢}$

(د) $١ = \frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢}$

(٦١) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة $\triangle ABC = ٩$ وحدة مربعة

فإن معادلة المستقيم \overleftrightarrow{BC}

هي

(أ) $١٦ = ٢س + ٢ص$

(ب) $٨ = س + ص$

(ج) $٨ = ٢س - ص$

(د) $٨ = ٢س + ص$

(٦٢) في الشكل المقابل :

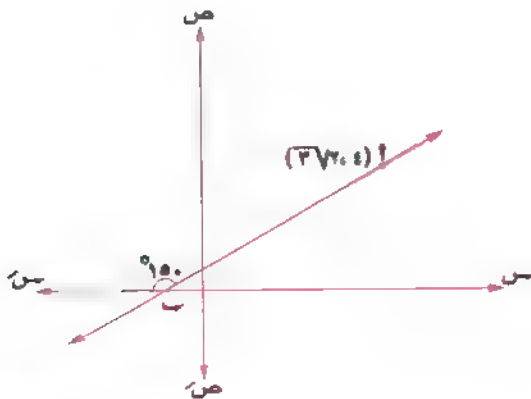
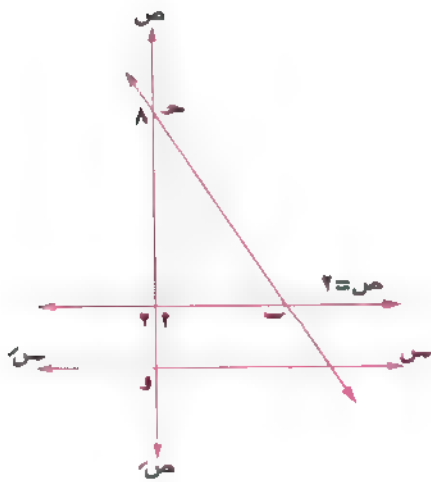
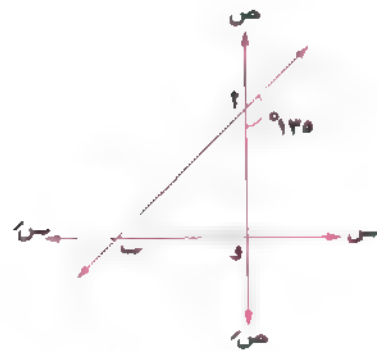
معادلة \overleftrightarrow{AB} هي

(أ) $١ = ٣\sqrt{٢}س - ص$

(ب) $٢ = ٣\sqrt{٢}س + ص$

(ج) $٢ = ٣\sqrt{٢}س + ص$

(د) $٦ = ٣\sqrt{٢}س - ص$



• (٦٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : $وح = س ح$ ، $و (د ح) = ٩٠^\circ$

أى مما يأتى يعتبر معادلة

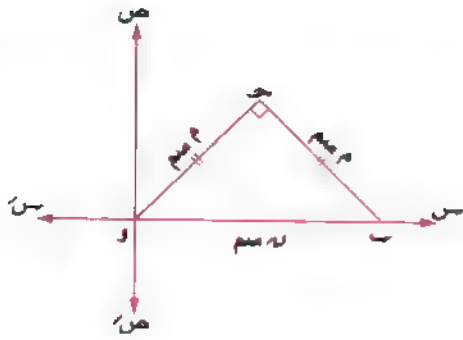
المستقيم $و ح$ ؟

(١) $ص = \frac{٢}{٥} س$

(ج) $ص = \frac{٥}{٢} س$

(ب) $ص = س$

(د) $ص = م = س$



• (٦٤) في الشكل المقابل :

ثلاث دوائر متطابقة متماسة مثنى مثنى ، إذا كانت :

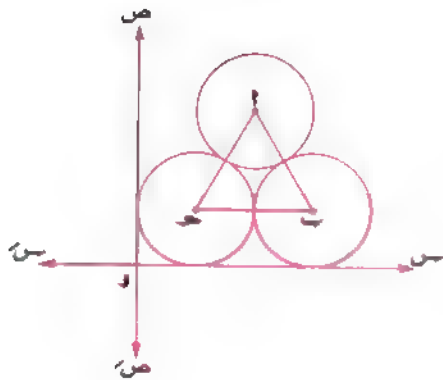
$ح = (٤ ، ٤)$ فإن معادلة المستقيم $أ ب$ هى

(١) $ص = (٤ ، ٤) + (١ - \sqrt{٣})$

(ب) $ص = (٤ ، ٨) + (١ - \sqrt{٣})$

(ج) $ص = (٤ ، ١٢) + (١ - \sqrt{٣})$

(د) $ص = (٤ ، ١٢) + (١ - \sqrt{٣})$



• (٦٥) في الشكل المقابل :

دائرتان متطابقتان فإن

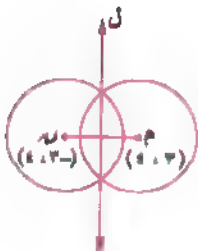
معادلة المستقيم $ل$ هى

(ب) $ص = ٠$

(١) $ص = ٠$

(د) $ص = ٣ + ٤ ص = ٠$

(ج) $ص = ٤ + ٣ ص = ٠$



• (٦٦) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها $(٨ ، ٧)$ ، المستقيم $أ ب$ مماس لها عند النقطة ؟

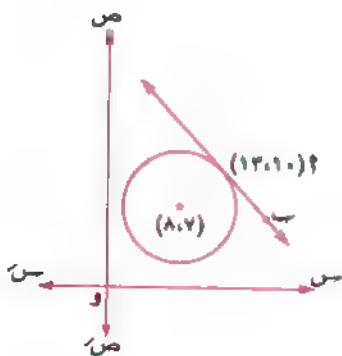
فإن معادلة المستقيم $أ ب$ هى ..

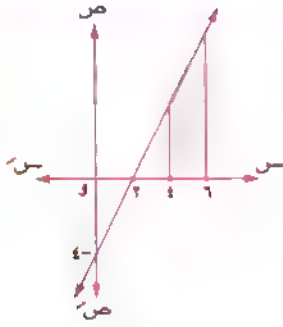
(١) $ص = ٣ + ٥ ص = ٩٥$

(ب) $ص = ٥ + ٢ ص = ٣٥$

(ج) $ص = ٥ + ٢ ص = ٩٥$

(د) $ص = ٥ + ٢ ص = ٩٥$





(٦٧) في الشكل المقابل :

مساحة الشكل المظلل = وحدة مربعة.

(١) ١٦ (ب) ١٢

(ج) ٨ (د) ٢٤

(٦٨) في الشكل المقابل :

أ ب ح د مربع فيه : ح (٢ ، ٢) ، ب (٢ ، ٦)

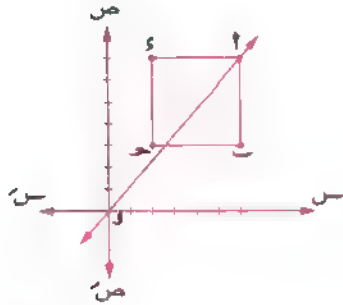
فإن معادلة \vec{AO} هي

(١) $4س - ٢ص = ٠$

(ب) $٦س - ٢ص = ٠$

(ج) $٧س - ٦ص = ٠$

(د) $٥س - ٥ص = ٠$



(٦٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب ح د مربع ، ح (٥ ، ٩)

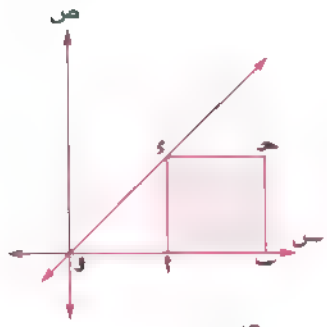
فإن معادلة \vec{AO} هي

(١) $٤س - ٥ص = ٠$

(ب) $٤س + ٥ص = ٠$

(ج) $٥س - ٤ص = ٠$

(د) $٥س + ٤ص = ٠$



(٧٠) في الشكل المقابل :

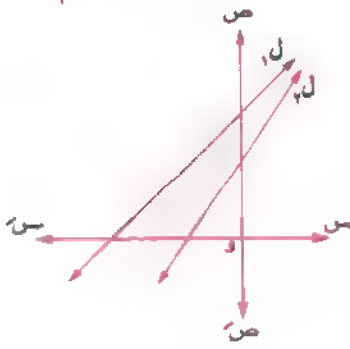
إذا كانت معادلة المستقيم ل_١ هي $٢س - ١٢ص = ٠$

، معادلة المستقيم ل_٢ هي $٤س + ٤ص = ٠$

فإن مساحة الشكل الرباعي المظلل = وحدة مربعة.

(١) ٢٤ (ب) ٢٦

(ج) ٢٨ (د) ٣٠



(٧١) في الشكل المقابل :

أ ب ح د مربع فيه : د (٤ ، ٣-)

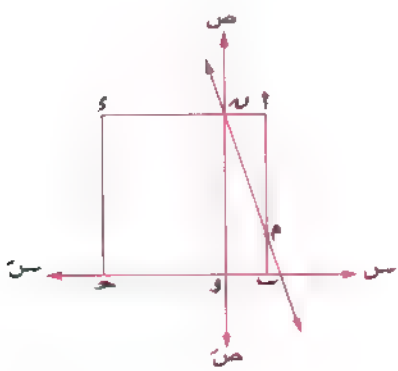
، م ٣ = ٩ م فإن معادلة \vec{MO} هي

(١) $\vec{MO} = (١ ، ١) + (٣- ، ١)$

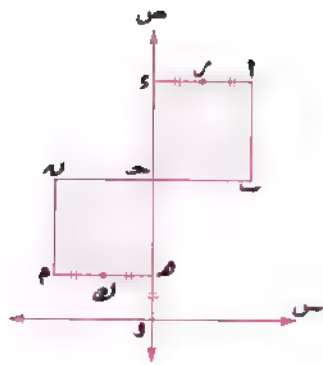
(ب) $\vec{MO} = (١ ، ١) + (١- ، ٣)$

(ج) $\vec{MO} = (٤ ، ٠) + (٣ ، ١)$

(د) $\vec{MO} = (٤ ، ٠) + (١- ، ١)$



٧٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : $A(1, 0)$ ، $B(3, 0)$ ، $C(3, 2)$ ، $D(1, 2)$ ، $E(0, 2)$ ، $F(2, 2)$ ، $G(2, 4)$ ، $H(0, 4)$ ،

لـ ، M منتصف BC ، N منتصف GH ، P على الترتيب

فإن معادلة المستقيم MPN هي

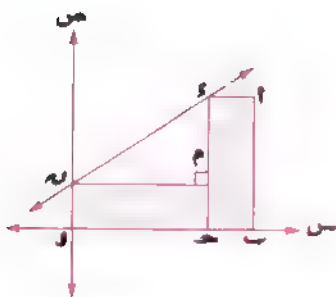
(أ) $x - 2y + 6 = 0$

(ب) $2x - y + 3 = 0$

(ج) $2x - y + 12 = 0$

(د) $2x - y + 6 = 0$

٧٣ في الشكل المقابل :



إذا كان : $A(2, 0)$ ، $B(4, 0)$ ، $C(4, 2)$ ، $D(2, 2)$ ، $M(2, 2)$ ، $N(4, 0)$ ،

وكان $P(3, 1)$ فإن معادلة المستقيم MPN هي

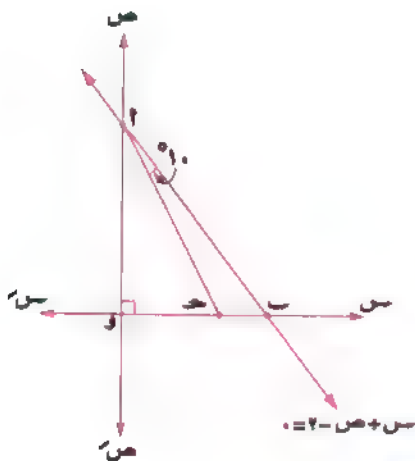
(أ) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$

(ب) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$

(ج) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$

(د) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$

٧٤ في الشكل المقابل :



و (د أ ح) = 90° ، معادلة AB هي : $x + y - 2 = 0$ ،

فإن : و (د أ ح) =

(أ) 55°

(ب) 60°

(ج) 45°

(د) 30°

الأسئلة المقالية

أوجد ميل الخط المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية ، وبين أيًا من هذه المستقيمات متوازيًا

وأيها متعامد :

(٢) $(0, 4)$ ، $(1, 2)$

(٤) $(2, 0)$ ، $(1, 3)$

(١) $(1, 3)$ ، $(5, 2)$

(٣) $(1, 7)$ ، $(2, 3)$

٢ إذا كانت معادلتا المستقيمين ل، لهما على الترتيب ٢ - ٣ - ٢ ص + ٩ = ٠

$$٢ - ٣ ص + ٦ = ٠$$

(١) أوجد ميل المستقيم ل،

(٢) أوجد قيمة ب التي تجعل ل، لهما متعامدين.

(٣) أوجد قيمة ب التي تجعل ل، لهما متعامدين.

٣ أي المستقيمات الآتية يكون موازيًا لمحور الصادات ، وأيها يكون موازيًا لمحور السينات ، وأيها يمر بنقطة

الأصل ، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محوري الإحداثيات (إن وجدت) :

$$(١) ٢ - ٣ ص + ٣ = ٠$$

$$(٢) ٣ - ٣ ص + ٣ = ٠$$

$$(٣) ٢ - ٣ ص + ٣ = ١٢$$

$$(٤) ٣ - ٥ ص = ٠$$

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذي :

(١) يمر بالنقطة (٣ ، ١) والمتجه $\vec{u} = (٣ ، ٥)$ متجه اتجاه له.

(٢) يمر بالنقطة (٥ ، ١) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

(٣) يمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٥ ، ١)

(٤) يمر بالنقطة (٢ ، ١) وميله $\frac{1}{3}$

(٥) يمر بالنقطة (٢ ، ٣) والمتجه $\vec{v} = (١ ، ٢)$ متجه اتجاه عمودي عليه.

(٦) يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويكون عموديًا على المستقيم $\vec{r} = (٥ ، ٢) + \lambda (١ ، ٢)$

(٧) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) عموديًا على المتجه $\vec{a} = (٢ ، ٣)$ حيث $\vec{a} = (٢ ، ٣) = \vec{b} + (٥ ، ٤)$

(٨) يحمل متجه الموضع $\vec{r} = (٢ ، ٣)$

٥ أوجد المعادلة العامة للمستقيم الذي :

(١) يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويوازي المستقيم : $٢ ص + ٧ - ٣ = ٠$

(٢) يمر بالنقطة (١ ، ٣) والمتجه $\vec{a} = (٣ ، ٤)$ حيث $\vec{a} = (٣ ، ٤) = \vec{b} + (٥ ، ٢)$ متجه اتجاه له.

(٣) يقطع طولًا قدره ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات والمتجه $\vec{u} = (٧ ، ٣)$ متجه اتجاه له.

(٤) يقطع طولًا قدره ٢ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات وميله $-\frac{1}{3}$

(٥) يقطع طولًا قدره ٢ وحدة من الجزء السالب لمحور السينات ويقطع طولًا قدره ٤ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات.

(٦) يمر بالنقطة $(-7, 2\sqrt{3})$ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(٧) يمر بالنقطة $(3, -5)$ عمودياً على المستقيم : $س - ٣ ص = ١١$

(٨) يمر بالنقطة $(3, 5)$ عمودياً على المستقيم \overleftrightarrow{AB} حيث : $A(2, -3)$ ، $B(5, 4)$

(٩) يكون عمودياً على \overline{AB} من نقطة A حيث $A(2, -6)$ ، $B(2, 1)$

(١٠) يكون عمودياً على \overline{AB} من نقطة المنتصف حيث : $A(-4, 1)$ ، $B(-2, 3)$

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 3)$ وميله 2 وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين $(4, 7)$ ،

$(5, 8)$ فأوجد قيمتي : A ، B

٧ أوجد معادلة المستقيم الذى ميله m ، والمار بالنقطة $(4, 0)$ ما هى نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور الصادات ؟

٨ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : $A(4, -1)$ ، $B(2, 3)$ يوازي المستقيم المار بالنقطتين

$C(2, 1)$ ، $D(3, -1)$ ثم أوجد معادلة كل من المستقيمين.

٩ إذا كانت : $A(0, 2)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(-2, 3)$ ثلاث نقط فى المستوى ، فأوجد المعادلة

المتجهة للخط المستقيم \overleftrightarrow{AB} ، ثم أثبت أن النقط A ، B ، C تقع على استقامة واحدة.

١٠ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم : $س - ٢ ص + ١٢ = ٠$

١١ أوجد معادلتى المستقيمين اللذين يمران بالنقطة $(-3, 2)$ ويوازيان المحورين.

١٢ أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $(2, -2)$ ويصنع زاوية موجبة جيب تمامها

يساوى $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

١٣ إذا كانت : $A(-4, 4)$ ، $B(-1, -2)$ ، C تنقسم \overline{AB} بنسبة $1 : 2$ من الداخل

فأوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة C والنقطة $(2, 2)$

١٤ إذا كانت : $A(1, 4)$ ، $B(-4, 6)$ فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة

تقسيم \overline{AB} من الداخل بنسبة $2 : 3$ ويكون عمودياً على المستقيم $س - ٤ ص - ١٢ = ٠$

١٥ الربط بالهندسة : \overline{AB} قطر فى دائرة مركزها M فإذا كان : $B(-7, 11)$ ، $M(3, -2)$

فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة A

١٦ نمذ الربط بالهندسة : إذا قطع المستقيم $3س + 4ص - 12 = 0$ محوري الإحداثيات السيني والصادي في النقطتين $أ$ ، $ب$ على الترتيب فأوجد :

(١) مساحة سطح Δ و $أب$ حيث و نقطة الأصل.

(٢) معادلة المستقيم العمودي على $أب$ ويمر بنقطة منتصفها.

١٧ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم الذى يمر بالنقطتين : $(-3, 1)$ ، $(4, 0)$

١٨ أوجد طولى الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم : $3س - 1ص = 5$ ، $(2, 5)$

١٩ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $(5, 2)$ عمودياً على المستقيم الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءاً طوله ٤ وحدات ومن الجزء السالب لمحور الصادات جزءاً طوله ٣ وحدات.

٢٠ أثبت أن النقط : $أ = (2, -3)$ ، $ب = (7, 2)$ ، $ج = (1, 1)$ هي رؤوس مثلث وإذا كانت $أ \in \overline{بج}$ بحيث $أ = ١ : ٢ = ٥$ فأوجد إحداثي النقطة $د$ ثم اكتب الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم $ح د$

٢١ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم $ل$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان :

(١) $ل : ٣ ص + ٦ = ٠$

(٢) $ل$ يمر بالنقطتين $(0, 0)$ ، $(2, -2)$

(٣) $ل$ يقطع من محورى السينات والصادات جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٦ وحدات طولية على الترتيب.

(٤) $ل : ٣س + ٢ص = ١٠$ ، $ص = ١ - ٢$

(٥) المتجه $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$ متجه اتجاه له.

(٦) المتجه $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ متجه اتجاه العمودى عليه.

٢٢ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $ل : ٢س - ٣ص - 6 = 0$

٢٣ أوجد الصورة المتجهة والصورة العامة لمعادلة المستقيم $ل : ٣س - ٢ص = 10$ ، $ص = ١ - ٣$

٢٤ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $ل : \frac{س}{١} + \frac{ص}{٢} = ١$ حيث $أ \neq 0$ ، $ب \neq 0$

٢٥ أوجد معادلة محور تماثل $أب$ حيث $أ = (2, 3)$ ، $ب = (-4, 5)$

٢٦ إذا كانت : $أ = (5, 6)$ ، $ب = (3, 7)$ ، $ج = (1, -3)$

، فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $أ$ وينصف $بج$

٢٧ $أب$ مثلث رؤوسه النقط $أ = (-1, 5)$ ، $ب = (4, -2)$ ، $ج = (-3, 0)$

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس $أ$ عمودياً على $بج$

٢٨ أثبت أن المعادلتين: $\sqrt{x} = (1, -2) + (x, 6)$ ، $\sqrt{x} = (0, 5) + (1, -2)$ يمثلان نفس المستقيم.

٢٩ أ ب ح د مربع فيه: $(2, 3) = \text{أ}$ ، $(4, 1) = \text{ح}$ أوجد معادلتى قطريه.

٣٠ أثبت أن النقطة: $\text{م} = (4, 5)$ هي مركز الدائرة المارة بـ $\text{أ} = (1, 1)$ ، $\text{ب} = (1, 7)$ ، $\text{ح} = (2, 0)$ ثم أوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ

مسائل تقييم مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

• (١) المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة $(0, 2)$ ويقطع محور الصادات فى النقطة $(0, 3)$ يمر بالنقطة

(١) $(1, 3)$ (ب) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (ج) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ (د) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

• (٢) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم ل، هي ٢ ، ب على الترتيب وكانت الأجزاء المقطوعة من محورى الإحداثيات السينى والصادى الموجبين بواسطة المستقيم ل، هي ٢ ، ٢ ب على الترتيب فإن

(١) ل، \perp ل، ل // ل (ب) ل، ل // ل (د) غير ذلك.

(ج) ل، ل \cap ل = $\{(1, 3)\}$

• (٣) إذا كان ل، مستقيم يمر بالنقطة $\text{أ} (2, 2)$ ويصنع زاوية قياسها 60° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإذا دار المستقيم ل، حول نقطة أ بزاوية قياسها 15° فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم فى الوضع الجديد هي

(١) $\text{ص} - \text{س} = 1$ (ب) $\text{ص} + \text{س} = 1$

(ج) $2\text{ص} + \text{س} = 1$ (د) $2\text{ص} + 3\text{س} = 5$

(٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 4)$ ويقطع جزئين متساويين فى الطول من محورى الإحداثيات يمكن أن تكون

(١) $\text{ص} + \text{س} = 7$ (ب) $\text{ص} - \text{س} = 1$

(ج) $\text{ص} + 2\text{س} = 10$ (د) $(1, 1)$ ، (ب) معاً.

(٥) إذا كانت: $\text{أ} (3, 5)$ ، $\text{ب} (-4, 8)$ فإن النسبة التى يقسم بها المستقيم $\text{ص} + \text{س} = 0$ القطعة المستقيمة أ ب من جهة أ هي

(١) $1:2$ (ب) $1:2$ (ج) $2:3$ (د) $3:2$

(٦) مسقط النقطة $(2, 2)$ على المستقيم ل: $\text{ص} + \text{س} = 11$ هو

(١) $(-6, 5)$ (ب) $(6, 5)$ (ج) $(5, 6)$ (د) $(-5, 6)$

(٧) صورة النقطة (٣، ٨) بالانعكاس في المستقيم ل : $س + ٣ ص - ٧ = ٠$ هي

- (١) (١-، ٤-) (ب) (٣-، ٨-) (ج) (١-، ٤-) (د) (٣، ٨)

(٨) إذا كانت النقطة أ (٠، ٠) هي صورة النقطة ب (٤، ٢) بالانعكاس في المستقيم ل

فإن معادلة المستقيم ل هي

- (١) $س = ٢ ص$ (ب) $٢ ص = س + ٥$
(ج) $٢ ص - س = ٥$ (د) $٦ = س + ص$

(٩) الشكل المقابل :

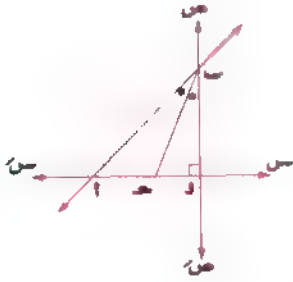


يمثل مربع أ ب ح د ، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{س د}$ هي $س + ص = ٤$

فإن معادلة القطر $\overline{ب د}$ هي

- (١) $س = ٤$ (ب) $ص = ٤$
(ج) $س + ص = ٢$ (د) $٢\sqrt{٤} = س + ص$

(١٠) في الشكل المقابل :

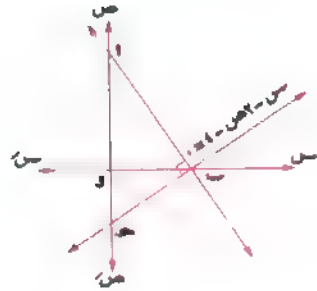


إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي : $١ = \frac{س}{٨} - \frac{ص}{٦}$

فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب ح}$ هي

- (١) $١ = \frac{س}{٦} + \frac{ص}{٣}$ (ب) $١ = \frac{س}{٦} + \frac{ص}{٢}$
(ج) $١ = \frac{س}{٣} - \frac{ص}{٦}$ (د) $١٨ = س + ص$

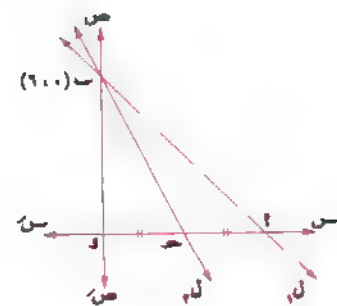
(١١) في الشكل المقابل :



مساحة $\Delta أ ب ح =$ وحدة مربعة.

- (١) ١٥ (ب) ٢٠
(ج) ٢٤ (د) ٣٢

(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة $\Delta أ ب ح = ١٥$ وحدة مربعة.

، ح = ٩ ح و فإن معادلة ل هي

- (١) $١ = \frac{س}{٦} + \frac{ص}{٥}$ (ب) $١ = \frac{س}{٥} + \frac{ص}{٦}$
(ج) $١ = \frac{س}{١٠} + \frac{ص}{٦}$ (د) $١ = \frac{س}{١٠} + \frac{ص}{٦}$

١٣ في الشكل المقابل :

مساحة المثلث Δ حـ

تساوى وحدة مربعة.

(ب) ٢

(١) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{3}{4}$

(ج) ١

١٤ في الشكل المقابل :

المعادلة الاتجاهية للمستقيم \overleftrightarrow{AB} هي

(١) $\overrightarrow{r} = (3, 0) + \lambda(1, -2)$

(ب) $\overrightarrow{r} = (0, 3) + \lambda(1, -2)$

(ج) $\overrightarrow{r} = (3, 0) + \lambda(2, 1)$

(د) $\overrightarrow{r} = (0, 3) + \lambda(2, 1)$

١٥ في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم \overleftrightarrow{AB}

هي $2x + 2y = 12$

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم \overleftrightarrow{CD} هي

(١) $\overrightarrow{r} = (3, 2) + \lambda(3, 2)$

(ب) $\overrightarrow{r} = (3, 2) + \lambda(2, 3)$

(ج) $\overrightarrow{r} = (2, 3) + \lambda(2, 3)$

(د) $\overrightarrow{r} = (2, 3) + \lambda(3, 2)$

١٦ في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم \overleftrightarrow{AB} هي $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

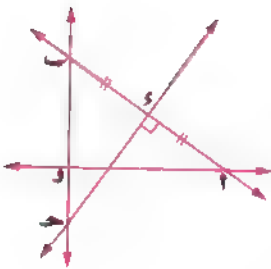
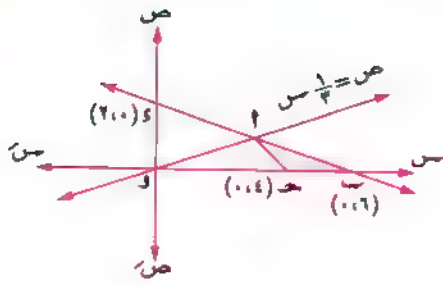
فإن المعادلة البارامترية للمستقيم \overleftrightarrow{CD} هي

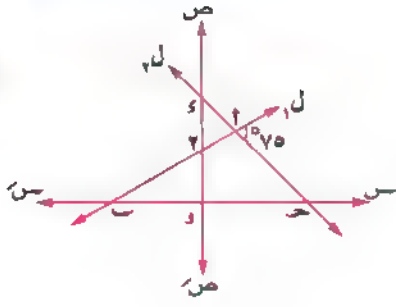
(١) $x = 3 + 4\lambda$ ، $y = 4 + 2\lambda$

(ب) $x = 4 + 2\lambda$ ، $y = 4 + 4\lambda$

(ج) $x = 3 + 2\lambda$ ، $y = 4 + 4\lambda$

(د) $x = 4 + 4\lambda$ ، $y = 3 + 2\lambda$





(١٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $l \cap l' = \{1\}$ ، و $و = و$

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم $ل$ هي

(أ) $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(1, 1) + \mu(1, -1)$

(ب) $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(1, 1) + \mu(1, -1)$

(ج) $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(1, 1) + \mu(1, -1)$

(د) $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(1, 1) + \mu(1, -1)$

(١٨) في الشكل المقابل :

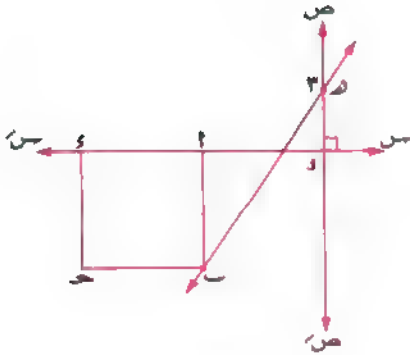
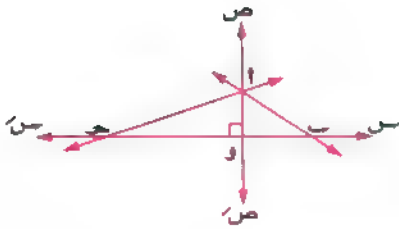
إذا كان : $و = ٢$ و $ب$ ، معادلة المستقيم \vec{AB}

هي $٢س + ٣ص = ٦$

فإن المعادلة المتجهة للمستقيم \vec{AB} هي

(أ) $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(0, 6) + \mu(3, 1)$

(ب) $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(0, 6) + \mu(3, 1)$



(١٩) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المربع $أب$ $و = ٣٦$ وحدة مربعة

، و $(-١٢, ٠)$ فإن المعادلة المتجهة للمستقيم \vec{AB}

هي

(أ) $\vec{r} = (3, 0) + \lambda(2, 3) + \mu(2, -3)$

(ب) $\vec{r} = (3, 0) + \lambda(2, 3) + \mu(2, -3)$

(ج) $\vec{r} = (6, -6) + \lambda(3, 2) + \mu(6, -6)$

(د) $\vec{r} = (6, -6) + \lambda(3, 2) + \mu(6, -6)$

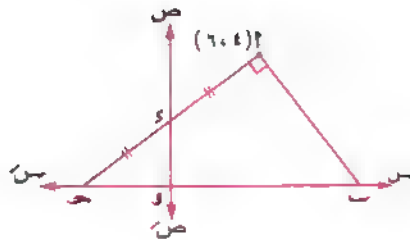
(٢٠) المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم \vec{AB} هما

(أ) $٢س + ٤ص = ٦$ ، $٤س + ٦ص = ٤$

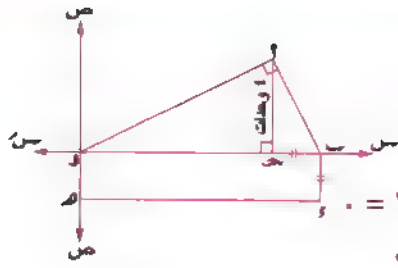
(ب) $٤س - ٣ص = ٤$ ، $٦ص - ٤س = ٦$

(ج) $٢س + ٤ص = ٦$ ، $٤س - ٦ص = ٤$

(د) $٤س - ٣ص = ٤$ ، $٦ص + ٤س = ٦$



٢١) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المستطيل W و $H = 20$ وحدة مربعة

فإن معادلة \overrightarrow{AB} هي

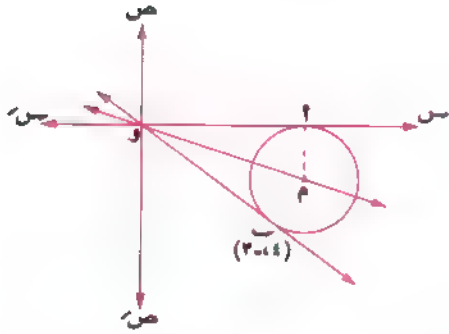
(أ) $2x + y + 20 = 0$

(ب) $2x + y - 20 = 0$

(ج) $2x - y - 20 = 0$

(د) $2x + y + 20 = 0$

٢٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : \overrightarrow{OA} ، \overrightarrow{OB} مماسين للدائرة M عند A ، B

فإن المعادلة الاتجاهية للمستقيم \overrightarrow{OM} هي

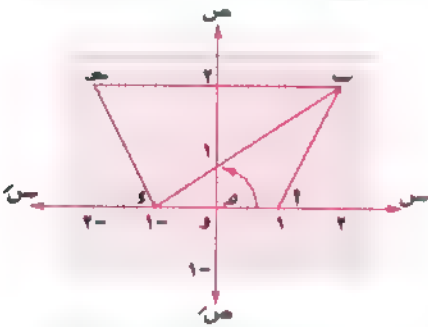
(أ) $\overrightarrow{r} = (0, 0) + (1, -3)$

(ب) $\overrightarrow{r} = (3, -4) + (1, -3)$

(ج) $\overrightarrow{r} = (0, 0) + (1, -3)$

(د) $\overrightarrow{r} = (0, 0) + (1, -3)$

٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : A ، B حو شكلاً رباعياً

أوجد :

(١) ميل \overrightarrow{AB} ثم استنتج \overrightarrow{CD} (د هـ)

(٢) معادلتى : \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{CD}

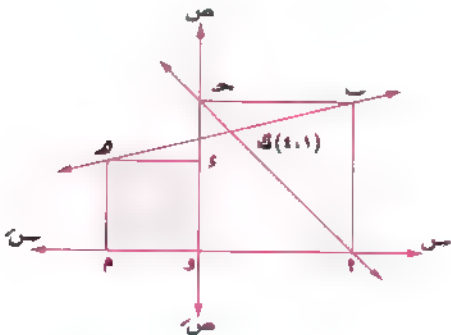
٣) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2, 4)$ ويقطع من محوري الإحداثيات جزأين غير متساويين

وموجبين مجموعهما ١٤

٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 2)$ وميله سالب والذي يصنع مع محوري الإحداثيات مثلثاً

مساحته ١٢ وحدة مربعة.

٥) في الشكل المقابل :



و A ، B ، C ، D م H مربعان

$\{L\} = \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD}$ ،

$L = (4, 1)$ ،

أوجد مساحة المربع المظلل.

٩ وحدات مربعة.

قياس الزاوية بين مستقيمين



بصفة عامة ينتج دائماً من تقاطع المستقيمين زاويتان [إحدهما مكمل للآخرى]
إما قائمتان أو إحدهما حادة والآخرى منفرجة.

* إذا كانت θ هي قياس الزاوية بين

المستقيمين L_1 ، L_2 اللذين ميلهما m_1 ، m_2

$$\text{فإن : } \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{m_2 m_1 + 1} \right|$$

$$\text{حيث : } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] , m_1 = \tan \theta , m_2 = \tan \theta$$

مع ملاحظة ما يأتي :

- ١] إذا كان ظل الزاوية موجباً فإننا نحصل على الزاوية الحادة.
- ٢] إذا كان ظل الزاوية يساوى الصفر فإن قياس الزاوية بينهما يساوى الصفر [ويكون $m_1 = m_2$ والمستقيمان متوازيان أو منطبقان]
- ٣] إذا كان ظل الزاوية غير معرف فإن قياس الزاوية بينهما يساوى 90° [ويكون $m_1 m_2 = -1$ والمستقيمان متعامدان]
- ٤] قياس الزاوية المنفرجة = قياس مكمل الزاوية الحادة.

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$$L_1 : y = 2x + 5 , L_2 : y = -x + 7$$

الحل

تذكراة!

ميل المستقيم l : $س + ب + ج = د$
يساوى $\frac{1}{-}$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{طام} = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 1} \right| = \left| \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} \right| = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{م} = 53^\circ$$

مثال 2

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$$ل_1 : \overrightarrow{س} = (2, 2) + ل + (3, 4) \quad , \quad ل_2 : \overrightarrow{س} = (1, 6) + ل + (7, 1)$$

الحل

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{م} = 45^\circ$$

$$1 = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) + 1} \right| = \left| \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} \right| = \frac{1}{4}$$

حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $ل_1 : س + ه + ص = 3$ ، $ل_2 : س + (2, 3) + ل + (4, 1)$

مثال 3

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_1 : س - 2ص + 1 = 0$

، $ل_2 : س + ل + 2ص = 0$ يساوى 45° فأوجد قيمة : $ل$

الحل

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad , \quad \text{م} = 45^\circ$$

$$\therefore \text{طام} = 45^\circ = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \right|$$

$$\therefore 1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\therefore 1 = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \right|$$

$$\therefore ل = 2$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = ل$$

$$\therefore \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

مثال ٤

أوجد قياسات زوايا المثلث $\triangle ABC$ الذي رؤوسه :

$$A = (6, 5), B = (6, 1), C = (3, 1)$$

الحل .

- (١) ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{5-1}{6-6} = \frac{4}{0}$ (غير معرف) $\therefore \overrightarrow{AB}$ يوازي محور الصادات
(٢) ميل $\overrightarrow{BC} = \frac{1-1}{3-6} = \frac{0}{-3} = 0$ صفر $\therefore \overrightarrow{BC}$ يوازي محور السينات
(٣) ميل $\overrightarrow{AC} = \frac{1-5}{3-6} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$
من (١) ، (٢) : $\therefore \angle C = 90^\circ$ $\therefore \angle A, \angle B$ حادتان.

$$\angle C = \left| \frac{\frac{4}{3} - 0}{\frac{4}{3} \times 0 + 1} \right| = 0^\circ \therefore \angle A, \angle B : (3) : \therefore \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

ملاحظة

* لتعيين نوع المثلث $\triangle ABC$ حسب زواياه (حيث $\angle A$ يمثل طول أكبر أضلاع المثلث)

- ١ إذا كان : $\angle A < \angle B + \angle C$ فإن المثلث منفرج الزاوية في B
٢ إذا كان : $\angle A = \angle B + \angle C$ فإن المثلث قائم الزاوية في B
٣ إذا كان : $\angle A > \angle B + \angle C$ فإن المثلث حاد الزوايا.

مثال ٥

أوجد قياسات زوايا المثلث الذي رؤوسه :

$$A = (4, 3), B = (1, 1), C = (-6, 4)$$

الحل .

$$\therefore \angle A = \sqrt{(1-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ وحدة طول.}$$

$$\angle B = \sqrt{(1-(-6))^2 + (1-4)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} = 7.62 \text{ وحدة طول.}$$

$$\angle C = \sqrt{(4-(-6))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{100 + 1} = \sqrt{101} = 10.05 \text{ وحدة طول.}$$

$$\therefore \angle A < \angle B + \angle C \therefore \triangle ABC \text{ منفرج الزاوية في } B$$

∴ د ، د ح حادثان.

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = \frac{1-3}{1+4} = \frac{2}{5}, \text{ ميل } \overrightarrow{BC} = \frac{4-1}{6+1} = \frac{3}{7}, \text{ ميل } \overrightarrow{AC} = \frac{4-3}{6+4} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \angle A = 28^\circ$$

$$\therefore \angle A = \left| \frac{\frac{1}{10} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{5} - 1} \right| = 28^\circ$$

$$\therefore \angle B = 20^\circ$$

$$\angle B = \left| \frac{\frac{1}{10} + \frac{3}{7}}{\frac{3}{7} + 1} \right| = 20^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 127^\circ$$

، مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين \times جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 28^\circ = \frac{1}{2} \times 16 \times \sin 28^\circ$$

$$= 12.7 \text{ وحدة مربعة.}$$

حاول بنفسك

أوجد قياسات زوايا المثلث $\triangle ABC$ إذا كان :

$$\angle A = 2^\circ, \angle B = 3^\circ, \angle C = 1^\circ$$



اختر نفسك

مستويات عليا

التعليق

تذكر

من أسئلة الكتاب المدرس

تمارين

6

على قياس الزاوية بين مستقيمين

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين ميلهما ٢ ، $-\frac{1}{2}$ يساوي

(١) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ٤٥°

(٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميلهما $\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{4}$ يساوي

(١) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٤٥° (د) ٥٤°

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين : $2 = 3$ ، $4 = 5$ يساوي

(١) ٩٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٣٠°

(٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل : $\overline{MR} = (0, 2) + (3, 1)$ ، $\overline{LN} = (0, 5) + (2, 1)$ يساوي

(١) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٩٠°

(٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $6 = 3$ ، $5 = 0$ والمستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ يساوي

(١) ١٣٥° (ب) ٦٠° (ج) ٣٠° (د) ٤٥°

(٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل : $\overline{MN} = 3$ ، $0 = 5$ ، ل : $\overline{PQ} = 3$ ، $6 = 0$ يساوي

(١) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٩٠°

(٧) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل : $\overline{MR} = (2, 5) + (3, 1)$ ، ل : $2 = 3$ ، $3 = 5$ يساوي

(١) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٥٠°

(٨) قياس الزاوية بين المستقيمين ل : $3 = 2$ ، $5 = 0$ ، ل : $\overline{MR} = (1, 4) + (1, 2)$ يساوي

(١) صفر° (ب) ٤٥° (ج) ٩٠° (د) ١٣٥°

(٩) قياس الزاوية بين المستقيمين ل : $\overline{MR} = (1, 2) + (2, 4)$ ، ل : $4 = 3$ ، $5 = 0$ هو

(١) ٠° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

(١٠) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل : $2س + 3ص = 15$ ، ل : $(1-، 1) = 3-، 1$ يساوى تقريباً

- (أ) 52° (ب) 51° (ج) 39° (د) 28°

(١١) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل : $2س - 3ص = 2$ ، ل : $ص = 1$ ، ل : $ص = 1$ يساوى تقريباً

- (أ) 19° (ب) 71° (ج) 18° (د) 72°

(١٢) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $3ص - 2ص = 5$ ، $ص + 2ص = 7$ هو

- (أ) 15° (ب) 30° (ج) 45° (د) 60°

(١٣) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيم : $3ص - 2ص = 3$ ، $ص = 2$ والمستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٤ ، ١) يساوى تقريباً

- (أ) $71^\circ 44'$ (ب) $19^\circ 28'$ (ج) $70^\circ 42'$ (د) $18^\circ 46'$

(١٤) قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $3س - 2ص = 5$ ، $ص = 2$ يساوى

- (أ) 30° (ب) 60° (ج) 45° (د) 120°

(١٥) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢) والمستقيم $ص = ٠$ يساوى

- (أ) 30° (ب) 60° (ج) 45° (د) 90°

(١٦) قياس الزاوية الحادة بين المستقيم : $(2، 2) = 3$ ، $(1، 1)$ والمستقيم $ص = ٠$ هو

- (أ) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 135°

(١٧) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $ص = 7$ ، $ص = 4$ + 2 يساوى 90° فإن :

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٩٠ (د) ١٠٠

(١٨) إذا كانت : $4(1، 2)$ ، $3(2، 2)$ ، $4(2، 2)$ فإن قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $أ ب$ ، $ب ح$ هو

- (أ) $1(1)$ (ب) $1(2)$ (ج) $1(3)$ (د) $1(4)$

(١٩) مجموعة قيم ل : التي تجعل قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $ص + 2 = 8$ ،

$2س - 3ص = 5$ ، $ص = 0$ يساوى $\frac{\pi}{4}$ هي

- (أ) $\{2\}$ (ب) $\{1، 3\}$ (ج) $\{1، 3\}$ (د) $\{2\}$

(٢٠) معادلة المستقيم ل الذي ميله موجب ويمر بالنقطة (١ ، ٤) ويصنع مع المستقيم : $3س - 2ص = 4$ ، زاوية ظل قياسها $\frac{1}{4}$ هي

- (أ) $ص - 3 = 4$ (ب) $ص - 2 = 4$

- (ج) $ص + 7 = 29$ (د) $ص - 7 = 29$

$$(3) \text{ ل: } \text{ص} + 2 + \text{ص} = 0 \text{ ، } \text{ل: } \text{ص} - 4 - \text{ص} = 3 \text{ ، } 0 = 3 - \text{ص}$$

$$(4) \text{ ل: } \text{ص} + 2 + \text{ص} = 3 \text{ ، } 0 = 3 - \text{ص} \text{ ، } \text{ل: } \text{ص} - 3 - \text{ص} = 1 \text{ ، } 0 = 1 + \text{ص}$$

$$(5) \text{ ل: } 2 + \text{ص} + 2 - \text{ص} = 6 \text{ ، } 0 = 6 - \text{ص} \text{ ، } \text{ل: } \text{ص} - \frac{\text{ص}}{5} = 2$$

$$(6) \text{ ل: } \frac{\text{ص}}{3} - \frac{\text{ص}}{2} = 1 \text{ ، } \text{ل: } \text{ص} - 4 - \text{ص} = 2$$

$$(7) \text{ ل: } 2 + \text{ص} = 0 \text{ ، } \text{ل: } 2 + \text{ص} + 0 = 1$$

$$(8) \text{ ل: } \overline{\text{ر}} = (2- , 2-) + (2- , 1) \text{ ، } \text{ل: } 2 + 2 = \text{ص} \text{ ، } \text{ل: } 3 = 1 -$$

$$4 \text{ إذا كان ل: } 1 - \text{ص} - 3 + \text{ص} = 7 \text{ ، } \text{ل: } 4 + \text{ص} + 6 - \text{ص} = 0 \text{ ، } \text{ل: } \frac{\text{ص}}{3} - \frac{\text{ص}}{2} = 3$$

فأوجد قيمة ؟ التي تجعل :

$$(1) \text{ قياس الزاوية بين المستقيمين ل ، ل: هو صفر}^{\circ}$$

$$(2) \text{ قياس الزاوية بين المستقيمين ل ، ل: هو } 90^{\circ}$$

3 أوجد معادلة المستقيم :

$$(1) \text{ المار بالنقطة } (1- , 2) \text{ ويصنع مع المستقيم : } \text{ص} + 2 + \text{ص} = 6 \text{ ، } 0 = 6 + \text{ص} \text{ زاوية ظل قياسها } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2) \text{ المار بالنقطة } (2- , 2) \text{ ويصنع مع المستقيم : } \overline{\text{ر}} = (1- , 2) + (4- , 3) \text{ زاوية قياسها } 45^{\circ}$$

$$4 \text{ إذا كان م هو قياس الزاوية بين المستقيمين : } \text{ص} - \text{ص} = 6 \text{ ، } 0 = 6 + \text{ص} \text{ ، } 0 = 4 + \text{ص} - 2 \text{ حيث م = } \frac{4}{5}$$

$$\text{فأوجد قيمة : ؟} \quad \text{« } 1 \frac{2}{3} \text{ ، } 14 \text{ »}$$

$$5 \text{ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : ل: } \text{ص} + \text{ص} = 6 \text{ ، } 2 + \text{ص} + \text{ص} = 2 \text{ يساوي } \frac{2}{5}$$

$$\text{أوجد قيمة : ل:} \quad \text{« } 2 \text{ ، } \frac{2}{11} \text{ »}$$

$$6 \text{ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : } 3 - \text{ص} - 5 + \text{ص} = 1 \text{ ، } \text{ل: } \text{ص} - \text{ص} = 2 \text{ يساوي } 45^{\circ}$$

$$\text{فأوجد قيمة : ل:} \quad \text{« } \frac{1}{2} \text{ ، } 4 \text{ »}$$

$$7 \text{ إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : } \overline{\text{ر}} = (0 , \frac{4}{3}) + (2 , 2) \text{ ل: } (2 , 2)$$

$$\text{، } \overline{\text{ر}} = (1 , 4) + (2 , 1) \text{ ل: } (2 , 1) \text{ يساوي } \frac{2}{3} \text{ فأوجد قيمة : ؟} \quad \text{« } \frac{4}{11} \text{ ، } 1 \frac{17}{22} \text{ »}$$

$$8 \text{ مستقيمان ميلهما م ، } \frac{3}{8} \text{ م وظل قياس الزاوية بينهما } = \frac{5}{11} \text{ ويمران بالنقطة } (3- , 1-)$$

أوجد معادلتيهما علماً بأن $0 < \text{م}$

$$9 \text{ أ ب ح مثلث فيه : } (0 , 2) = \text{أ} \text{ ، } (1 , 2) = \text{ب} \text{ ، } (1- , 2-) = \text{ح}$$

$$\text{أوجد قياس زاوية : ؟} \quad \text{« } 68^{\circ} \text{ ، } 105^{\circ} \text{ »}$$

١٠ أوجد قياسات زوايا المثلث $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(4, 7)$ ، $B(-2, 1)$ ، $C(2, -4)$ ،
 $\angle A = 63.4^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle C = 26.6^\circ$.

١١ أوجد قياسات زوايا المثلث $\triangle ABC$ حيث $A(2, 3)$ ، $B(5, 1)$ ، $C(-2, 1)$ ،
 ثم أوجد : مساحة المثلث لأقرب وحدة .
 «٧ وحدات مربعة»

١٢ $\triangle ABC$ مثلث فيه : $A(0, 5)$ ، $B(2, -1)$ ، $C(6, 3)$ ،
 أثبت أن : المثلث متساوي الساقين ثم أوجد قياس زاوية $\angle A$
 ثم أوجد : مساحته لأقرب رقمين عشريين .
 « $16\sqrt{2}$ ، 16 وحدة مربعة»

١٣ $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية في A ومعادلة \vec{AB} هي $\vec{r} = (1, 1) + t(3, -1)$ ،
 ومعادلة \vec{AC} هي $\vec{s} = (5, -1) + t(2, 1)$ أوجد : $\angle A$ (جـ)

١٤ إذا كان المثلث $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B حيث : $A(2, 3)$ ، $B(5, 7)$ ، $C(1, 1)$ ،
 فأوجد قيمة : $\sin C$ ، ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الأخريين .
 « 10° ، 45° ، 45° »

١٥ $\triangle ABC$ مثلث رؤوسه $A(3, -2)$ ، $B(-3, 13)$ ، $C(5, 2)$ ، نصف \vec{AB} في E
 أوجد : قياس الزاوية الحادة بين \vec{AE} ، \vec{BC}
 « 56.6° »

١٦ $\triangle ABC$ فيه : $A(5, 7)$ ، $B(1, 5)$ ، $C(4, 2)$ ،
 (١) أوجد : إحداثيي نقطة E التي تقسم \vec{BC} من الداخل بنسبة $1:2$ ،
 (٢) أثبت أن : $\vec{AE} \perp \vec{BC}$ ،
 (٣) أثبت أن : $\angle A = 90^\circ$ ،
 (٤) أوجد : $\sin D$ ،
 (٥) أوجد مساحة سطح المثلث : $\triangle ABC$

١٧ إذا كانت : $A(5, 7)$ ، $B(6, -1)$ ، $C(\frac{2}{3}, 5)$ ،
 فأثبت أن : المستقيم $\vec{r} = (1, 3) + t(1, -2)$ يصنع مع المستقيمين \vec{AB} ، \vec{AC} مثلثًا متساوي
 الساقين رأسه A

١٨ أثبت أن المثلث الذي معادلات المستقيمات الحاملة لأضلاعه هي :
 $3x + 4y = 36$ ، $7x - 3y = 13$ ، $7x + 3y = 9$ ،
 هو مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين .

مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :
 (١) قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيمين : $\vec{r} = (2, \sqrt{3}) + t(5, 0)$ ، $\vec{s} = (2, \sqrt{3}) + t(3, -7)$ هو
 (١) 150° (ب) 60° (ج) 135° (د) 120°

(٢) ل، ل، مستقيمان ظل الزاوية بينهما يساوي $\frac{1}{3}$ ، ميل ل، يساوي ضعف ميل ل،
فإن ميل المستقيم ل، =

(ب) $1 \pm$

(١) $\frac{1}{3} \pm$

(ج) 1 ، $\frac{1}{3}$

(٣) في الشكل المقابل :

$\theta =$ ط

(١) $\frac{4}{3}$

(ب) $\frac{2}{11}$

(ج) $\frac{5}{11}$

(د) $\frac{7}{11}$

(٤) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\theta = \frac{2}{5}$

فإن النقطة ب =

(١) (٨ ، ٠)

(ب) (٧ ، ٠)

(ج) (٦ ، ٠)

(د) (٤ ، ٠)

(٥) في الشكل المقابل :

ل = =

(١) $\frac{2}{4}$

(ج) $\frac{2}{4}$

(٦) في الشكل المقابل :

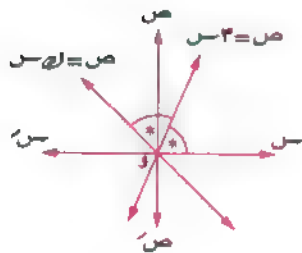
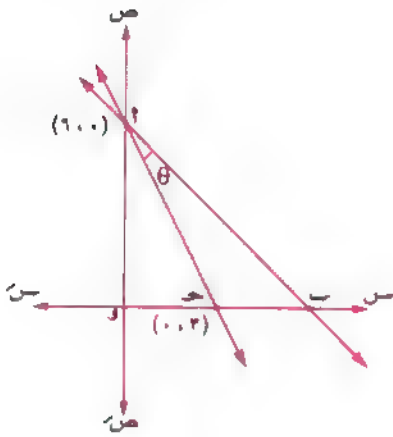
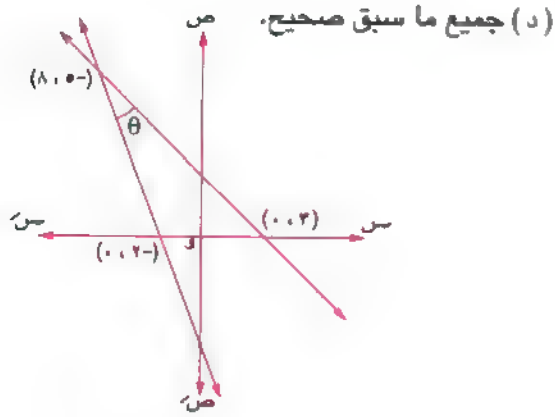
ل = =

(١) ٣

(ب) ٣-

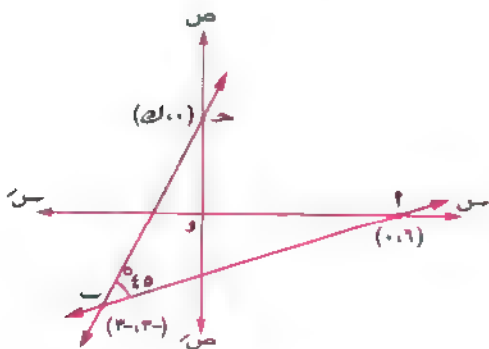
(ج) $\frac{9}{4}$

(د) $\frac{9}{4}$

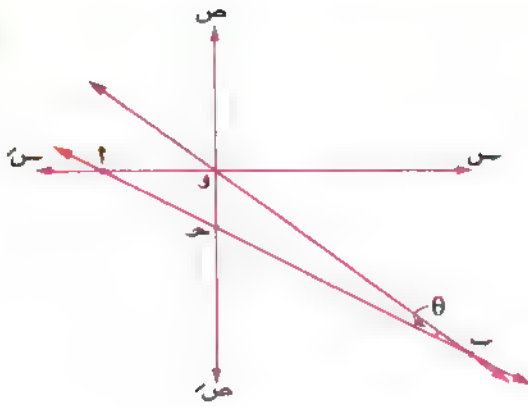


(ب) $\frac{4}{3}$

(د) $\frac{2}{3}$



(٧) في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة \vec{AB} هي $س + ٢ ص = ٦$.

وكان $ب = ح = ٢$ ح

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{11}{17}$

(ب) $\frac{2}{11}$

(ج) $\frac{1}{11}$

(د) $\frac{11}{9}$

(٨) إذا دار المستقيم المار بالنقطتين $أ(٢, ٠)$ ، $ب(٣, ٢)$ حول نقطة ٢ بزاوية قياسها ٤٥° في اتجاه

ضد عقارب الساعة فإن معادلة المستقيم \vec{AB} في وضعه الجديد هي

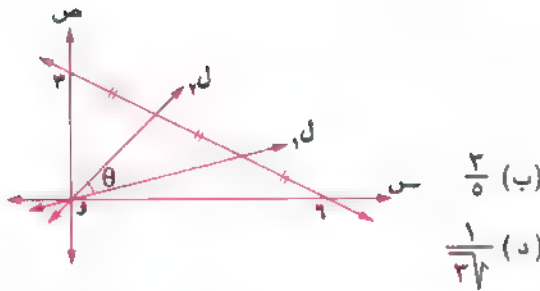
(ب) $س - ٣ ص = ٢$

(أ) $٢ ص + س = ٦$

(د) $س + ٣ ص = ٢ -$

(ج) $٣ ص + س = ٦$

(٩) في الشكل المقابل :



$\theta = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{3}{4}$

(ب) $\frac{2}{5}$

(ج) $\frac{1}{3}$

(د) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

أوجد معادلة أحد الضلعين المتساويين في المثلث القائم الزاوية إذا كانت معادلة الوتر هي $س + ٣ ص = ٤$ ، $٤ = ٤ + س$.

ونقطة رأس الزاوية القائمة هي $(٢, ٢)$ « $س - ٧ ص = ١٢$ ، $١ = ٧ ص + س$ »

إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية جيب تمامها يساوي $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ مع الخط المستقيم

ل : $٣ - س - ص = ٥$ ، فما هو ميل الخط المستقيم ل ؟

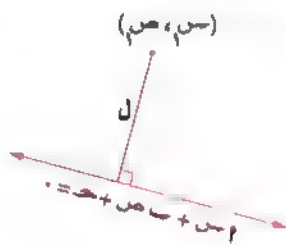
أوجد : معادلة الخط المستقيم ل إذا كان يمر بالنقطة $(١, -٢)$ « غير معرف أ ، $\frac{4}{3}$ »

أثبت أن الزاوية بين المستقيمين : $ص = \frac{١+٣}{١-٣} س + ٦$ ، $ص - ٣ س = ١$.

قياسها ثابت لجميع قيم $١ \neq ٣$ وأوجد قياس هذه الزاوية. « ٤٥° »

طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

4



* طول العمود (ل) المرسوم من النقطة (س, ص) ،

إلى الخط المستقيم الذي معادلته : $س + ب ص + ح = ٠$

$$\text{يتحدد من العلاقة : طول العمود (ل) = } \frac{|س + ب ص + ح|}{\sqrt{١ + ب^2}}$$

ملاحظات هامة

١ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (س, ص) على المستقيم :

١ س + ب ص + ح = ٠ يساوى الصفر فإن النقطة تكون واقعة على المستقيم.

٢ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل (٠, ٠) على المستقيم : $س + ب ص + ح = ٠$ يساوى $\frac{|ح|}{\sqrt{١ + ب^2}}$

٣ طول العمود المرسوم من النقطة (س, ص) على محور السينات = |ص|

٤ طول العمود المرسوم من النقطة (س, ص) على محور الصادات = |س|

٥ إذا كانت (س, ص) ، (س, ص) ، (س, ص) نقطتين فى المستوى الذى يحوى الخط المستقيم

١ س + ب ص + ح = ٠ وكان المقداران ١ س + ب ص + ح

، ٢ س + ب ص + ح لهما نفس الإشارة كانت النقطتان على جانب واحد من الخط المستقيم وإن اختلفا

فى الإشارة كانت النقطتان على جانبيين مختلفين من الخط المستقيم.

مثال ١

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٥) إلى الخط المستقيم: \overleftrightarrow{AB} حيث $A(1, 2)$ و $B(4, -3)$

الحل

∴ المستقيم \overleftrightarrow{AB} يمر بالنقطة $(1, 2)$ وميله $m = \frac{2-5}{1-4} = \frac{3}{3} = 1$

∴ الصورة الكارتيزية هي: $\frac{y-5}{x-2} = -1$ ∴ $4 - y = x - 2$ ∴ $x + y - 6 = 0$

∴ الصورة العامة هي: $3x + 4y - 18 = 0$

∴ طول العمود = $\frac{|3(2) + 4(5) - 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$ وحدة طول.

حاول بنفسك

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(2, 3)$ إلى الخط المستقيم: \overleftrightarrow{AB} حيث $A(1, 2)$ و $B(4, -3)$

مثال ٢

أوجد بُعد النقطة $P(2, 4)$ عن المستقيم المار بالنقطة $Q(2, 0)$ وميله $m = \frac{3}{4}$

الحل

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطة $Q(2, 0)$ وميله $m = \frac{3}{4}$ هي:

$$\frac{y-0}{x-2} = \frac{3}{4} \text{ أي } 4y = 3x - 6 \text{ ∴ } 3x - 4y - 6 = 0$$

∴ البُعد = طول العمود المرسوم من النقطة P إلى المستقيم

$$= \frac{|3(2) - 4(4) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ وحدة طول.}$$

لاحظ أن

بعد نقطة عن مستقيم تعني طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى هذا المستقيم.

مثال ٣

إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة $(7, h)$ إلى المستقيم: $6x - 8y + 17 = 0$

يساوي ٣,٥ وحدة طول فأوجد قيمة h

الحل

$$\frac{|6h - 56|}{10} = \frac{7}{2} \quad \therefore$$

$$\frac{|6h - 56|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{7}{2} \quad \therefore$$

$$\therefore 6h - 56 = 35 \text{ أو } 6h - 56 = -35$$

$$\therefore |6h - 56| = 35$$

$$\therefore 6h - 56 = 35 \text{ أو } 6h - 56 = -35$$

مثال ٤

مستقيم طول العمود النازل من النقطة (٢، ٥) عليه يساوي ٣ وحدات والمتجه (٣، ٤) متجه اتجاه له أوجد معادلة هذا المستقيم.

الحل

∴ المتجه (٣، ٤) متجه اتجاه للمستقيم. ∴ المتجه (٤، -٣) متجه عمودي على المستقيم.

∴ معادلة المستقيم هي : ٤س - ٣ص = ٠

∴ طول العمود عليه من النقطة (٢، ٥) = ٣ وحدة طول.

$$\therefore 3 = \frac{|4 \times 2 - 3 \times 5|}{\sqrt{16 + 9}} \quad \therefore 3 = \frac{|8 - 15|}{\sqrt{25}} \quad \therefore 3 = \frac{7}{5} \quad \therefore 15 = |7 - 3ص|$$

$$\therefore 15 \pm 7 = 3ص \quad \therefore 22 = 3ص \quad \therefore 3ص = 22$$

∴ معادلة المستقيم هي : ٤س - ٣ص = ٢٢

أ، ٤س - ٣ص = ٨

مثال ٥

أ ب ح مثلث رؤوسه (١، ٥) ، ب (٥، -٣) ، ح (١، ٠) أوجد مساحته.

الحل

نعتبر أحد الأضلاع وليكن ب ح هو قاعدة المثلث ونوجد الارتفاع وهو طول العمود من أ

إلى الخط المستقيم ب ح ونوجد كذلك طول ب ح ثم نحسب مساحة المثلث كما يلي :

$$\therefore \text{ب ح} = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \text{ وحدات طولية.}$$

$$\text{معادلة ب ح هي : } \frac{3}{5} = \frac{3+0}{0-1} = \frac{3+ص}{0-س} \quad \text{أي } 3س - 3ص = 3$$

$$\therefore \text{طول العمود من أ إلى ب ح} = \frac{|3 - 3 \times 0 + 3|}{5} = \frac{|3 - 0 + 3|}{5} = \frac{6}{5} \quad \therefore \text{وحدات طولية.}$$

$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ ب ح أ} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{6}{5} = 3 \text{ وحدات مربعة.}$$

حاول بنفسك

إذا كانت النقط : أ = (٣، ٠) ، ب = (٣، ٢) ، ح = (-١، ٥) تمثل رؤوس مثلث أوجد :

١ طول ب ح

٢ معادلة المستقيم ب ح

٣ طول العمود الساقط من أ على ب ح

٤ مساحة \triangle \text{ ب ح أ}

مثال ٦

أوجد مساحة الدائرة التي مركزها النقطة م (١ ، ٢) ويمسها المستقيم الذي معادلته :
ل : ٦ س + ٨ ص - ٢ = ٠ (حيث $\pi = ٣,١٤$)

الحل

∴ طول العمود المرسوم من المركز م (١ ، ٢) على المماس ل = $\frac{|2 - 2 \times 8 + 1 \times 6|}{\sqrt{(8)^2 + (6)^2}}$ وحدة طول.
∴ طول نصف قطر الدائرة = طول العمود المرسوم من المركز على المماس ل
∴ نق = ٢ وحدة طول. ∴ المساحة = $\pi \text{ نق}^2 = 4 \times 3,14 = 12,56$ وحدة مربعة.

مثال ٧

أثبت أن النقطتين : ٩ = (٣ ، ١) ، ٦ = (-٣ ، ٢) تقعان على جانبيين مختلفين من الخط المستقيم
ل : ٣ س - ٤ ص + ٦ = ٠ وعلى بُعدين متساويين منه.

الحل

∴ طول العمود من ٩ على الخط المستقيم ل = $\frac{|11|}{0} = \frac{|6 + 1 \times 4 - 3 \times 3|}{16 + 9}$ وحدة طول.
∴ طول العمود من ٦ على الخط المستقيم ل = $\frac{|11-|}{0} = \frac{|6 + (2) 4 - (-3) 3|}{16 + 9}$ وحدة طول.
∴ ٩ ، ٦ على بُعدين متساويين من الخط المستقيم ل
∴ المقدار : ٣ س - ٤ ص + ٦ له إشارتان مختلفتان ١١- ، ١١-
عند التعويض بإحداثيي كل من النقطتين ٩ ، ٦
∴ النقطتان تقعان على جانبيين مختلفين من المستقيم ل

مثال ٨

أثبت أن المستقيمين ل_١ ، ل_٢ متوازيان وأوجد البُعد بينهما في كل مما يأتي :

١ ل_١ : ٢ س - ٤ ص + ١١ = ٠ ، ل_٢ : ٢ س - ٤ ص + ٧ = ٠

٢ ل_١ : $\overline{r} = (٢ ، -٥) + ٤(٣ ، -٤)$ ، ل_٢ : $\overline{r} = (١ ، ٤) + ٤(٦ ، ٨)$

الحل

١ ∴ ميل المستقيم ل_١ = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

∴ ميل المستقيم ل_٢ = $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

∴ الميالن متساويان.

∴ المستقيمان متوازيان.

ملاحظة

لإيجاد البُعد بين ل_١ ، ل_٢ نعين نقطة على أحد المستقيمين ونوجد طول العمود الساقط منها على المستقيم الآخر.

* فيوضع $ص = ١$ مثلاً في معادلة المستقيم لـ

$$\therefore ص = ٦ \quad \therefore (٦, ١) \in ل$$

\therefore البعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم

من النقطة $(٦, ١)$ على المستقيم لـ

$$\frac{|٧ + ٦ \times ٤ - ١ \times ٢|}{\sqrt{١٦ + ٤}} = \frac{|٧ + ٢٤ - ٢|}{\sqrt{٢٠}} = \frac{٢٩}{\sqrt{٢٠}} \text{ وحدة طول.}$$

٢ المتجه $ي = (٢, -٤)$ متجه اتجاه للمستقيم لـ

، المتجه $ي' = (-٦, ٨)$ متجه اتجاه للمستقيم لـ

$$\therefore ي' = (-٦, ٨) = ٢(-٣, ٤) = ٢ي$$

$$\therefore ل // ل'$$

$$\therefore \text{النقطة } م = (٢, -٥) \in ل$$

$$\therefore ل : ص = ١ - ٦ي \quad م : ص = ٨ + ٤ي$$

$$\therefore ل : ٤ص + ٣ = ١٦$$

\therefore البعد بين المستقيمين = طول العمود المرسوم من النقطة $(٢, -٥)$ على المستقيم لـ

$$٤, ٦ = \frac{|١٦ - (٥-) ٣ + ٢ \times ٤|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$$

مثال ٩

أثبت أن النقطة : $(٤, ٦)$ تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

$$ل : ٩ص - ١٢ص - ٨ = ٠ \quad ل' : ٣ص + ٥ = ٠$$

الحل

النقطة تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين لـ ، لـ إذا كانت على بُعدين متساويين من المستقيمين.

$$\frac{|٨ - ٧٨ - ٣٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|٨ - ٦ \times ١٢ - ٤ \times ٩|}{\sqrt{١٦٩ + ٨١}}$$

$$(١) \quad \frac{|٥٠-|}{\sqrt{١٠}} = \frac{|١٠-|}{\sqrt{١٠}} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \text{معادلة لـ هي : } \frac{٣-ص}{١} = \frac{٥-ص}{٣} \quad \text{أي : } ٣ص - ٤ = ٤ + ٣ص$$

$$\therefore \text{بُعد النقطة } (٤, ٦) \text{ عن المستقيم لـ} = \frac{|٤ + ٦ \times ٣ - ٤|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|١٠-|}{\sqrt{١٠}}$$

$$(٢) \quad \frac{|١٠-|}{\sqrt{١٠}} = \text{وحدة طول}$$

من (١) ، (٢) : \therefore النقطة $(٤, ٦)$ تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين لـ ، لـ



اختر نفسك

على طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

لنا من أسئلة الكتاب المدرسي • تفكر • مهم • تطبيق • مستويات عليا

تمارين
7

أسئلة الاختيار من متعدد

أولاً

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طول العمود المرسوم من النقطة $(-٢, ٥)$ إلى محور الصادات يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ٣-

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة $(-٢, ٥)$ إلى محور السينات يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ٣-

(٣) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم $٣س - ٤ص - ١٥ = ٠$

يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ١٥

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة $(٣, ١)$ إلى الخط المستقيم : $٤س + ٣ص - ٥ = ٠$

يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة $(٠, -٥)$ إلى الخط المستقيم $٧س + ٥ = ٠$

يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٢

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة $(١, ١)$ إلى المستقيم $٥س + ٧ص - ١٢ = ٠$ يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (ج) ١ (د) ٠

(٧) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم $\overline{١س + ٢ص = ٤}$ يساوي وحدة طول.

يساوي وحدة طول.

(١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ١

(٨) طول العمود المرسوم من النقطة $(-٢, ٤)$ على المستقيم $\overline{٣س + ٠ص = ٨}$ يساوي وحدة طول.

يساوي وحدة طول.

(١) ١,٦ (ب) ٢,٦ (ج) ٠,٦ (د) ٣,٦

(٩) طول العمود المرسوم من النقطة $(-٢, ٥)$ على المستقيم $٢س + ٤ص - ٣ = ٠$ يساوي وحدة طول.

يساوي وحدة طول.

(١) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(١٠) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (١ ، ٠) يساوى وحدة طول.

- (١) ٢ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

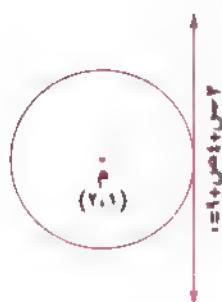
(١١) بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) والمتجه (٢ ، ١) متجه اتجاه له يساوى وحدة طول.

- (١) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt{2}$ (ج) $\sqrt{3}$ (د) $\sqrt{4}$

(١٢) \vec{AB} ممثل فيه : $A(3, 7)$ ، $B(7, 1)$ ، $C(3, 2)$ فإن طول العمود النازل من A إلى \vec{BC} يساوى وحدة طول.

- (١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ١

(١٣) في الشكل المقابل :



المستقيم 2 سم + 4 سم + 9 = مماس للدائرة M

حيث $M(2, 1)$ فإن طول نصف قطر الدائرة

يساوى وحدة طول.

- (١) ٥ (ب) $\sqrt{5}$ (ج) ٤ (د) ٣

(١٤) مساحة الدائرة التي مركزها النقطة (٤ ، ١) ويمسها المستقيم $L: \vec{r} = (1, 1) + t(12, 5)$ تساوى وحدة مربعة.

- (١) 8π (ب) 9π (ج) 6π (د) 3π

(١٥) البعد بين المستقيمين : $3 - x$ ، $2 + x$ يساوى وحدة طول.

- (١) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) ٥

(١٦) البعد بين المستقيمين : $\vec{r} = (-1, 0) + t(4, 3)$ ، $6 - x + 8 - y = 9$ يساوى وحدة طول.

- (١) $\frac{1}{4}$ (ب) ١ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) ٢

(١٧) البعد بين المستقيمين : $3 - x - 4 + y = 20$ ، $2 - x - 4 + y = 10$ يساوى وحدة طول.

- (١) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(١٨) البعد بين المستقيمين : $\vec{r} = (2, 0) + t(12, 5)$ ، $\vec{r} = (6, 4, 0) + t(12, 5, 0)$ يساوى وحدة طول.

- (١) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(١٩) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ٤) على المستقيم $2 - x + y = 1$ يساوى $\sqrt{5}$ وحدة طول فإن إحدى قيم $k =$

- (١) ٤- (ب) ٥- (ج) ٨- (د) ١٠-

(٢٠) إذا كان البعد بين المستقيمين ل : $3 - 4 + 5 = 12$ ، ل : $6 - 8 + 5 = 0$ ،
يساوى ٣ وحدات طول ، $0 < 0$ ، فإن : $0 = \dots\dots\dots$

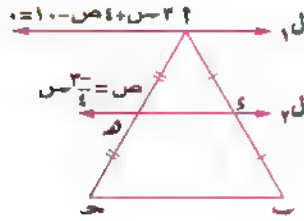
(د) ٣

(ج) ٣٠

(ب) ٦

(١) ٥٤

(٢١) في الشكل المقابل :



طول العمود المرسوم من نقطة P على المستقيم AB يساوى وحدة طول.

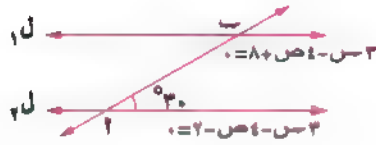
(ب) ٣

(١) ٢

(د) ٥

(ج) ٤

(٢٢) في الشكل المقابل :



طول $AB = \dots\dots\dots$ وحدة طول.

(ب) ٢

(١) ١

(د) ٤

(ج) ٣

(٢٣) معادلة أحد المستقيمين الذى ميله $-\frac{5}{13}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة $(2, -1)$ يساوى ٢ وحدة طول هى
 (ب) $5 - 12 + 28 = 0$
 (د) $5 - 12 + 28 = 0$

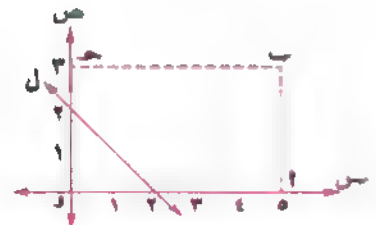
(ب) $5 - 12 + 28 = 0$

(١) $5 - 12 + 28 = 0$

(د) $5 - 12 + 28 = 0$

(ج) $5 - 12 + 28 = 0$

(٢٤) في الشكل المقابل :



طول العمود المرسوم من النقطة B على المستقيم L يساوى وحدة طول.

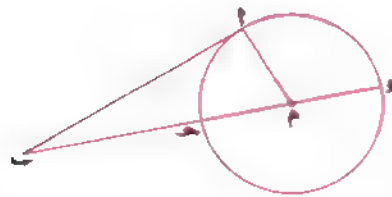
(ب) $2\sqrt{2}$

(١) $2\sqrt{2}$

(د) ٤

(ج) ٣

(٢٥) في الشكل المقابل :



إذا كانت M دائرة ، AB مماسًا لها وكانت معادلة المستقيم MA هى $3 - 2 + 4 = 0$ ، كانت النقطة $B(4, -4)$ فإن : $AB \times \dots\dots\dots$ وحدة مربعة.

هى $3 - 2 + 4 = 0$ ، كانت النقطة $B(4, -4)$

فإن : $AB \times \dots\dots\dots$ وحدة مربعة.

(د) ٤٠

(ج) $5\sqrt{2}$

(ب) $10\sqrt{2}$

(١) ٢

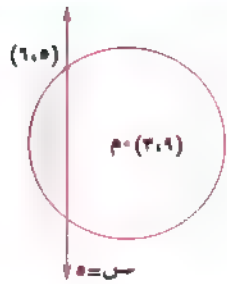
(٢٦) مربع فيه معادلتى المستقيمين الحاملين لـ $3 = 5$ ، $2 = 5$ فإن معادلتى المستقيمين الحاملين للضلعين الآخرين يمكن أن يكونا

(ب) $3 = 5$ ، $2 = 5$

(١) $3 = 5$ ، $2 = 5$

(د) $3 = 5$ ، $2 = 5$

(ج) $3 = 5$ ، $2 = 5$



(٢٧) في الشكل المقابل :

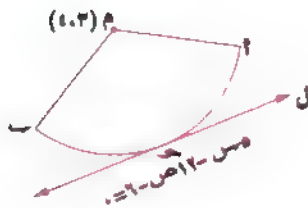
ارتفاع القطعة الدائرية

الصغرى المظللة = وحدة طول.

- (أ) ٤ (ب) ٥
(ج) ٢ (د) ١

(٢٨) في الشكل المقابل :

قطاع دائري ، المستقيم ل مماس لدائرته

فإن : $MA =$ وحدة طول.

- (أ) ٤ (ب) $2\sqrt{2}$
(ج) $\frac{7}{13}$ (د) ٣

(٢٩) إذا كان المستقيم ل يمر بنقطة الأصل وكانت النقطتان (١ ، -٢) ، (٣ ، ٤) على بعدين متساويين من

المستقيم ل فإن ميل المستقيم ل يساوي

- (أ) $\frac{1}{3}$ ، ٢ (ب) $\frac{1}{2}$ ، ١ (ج) $\frac{1}{3}$ ، ٣ (د) $\frac{1}{3}$ ، ٢

(٣٠) لجميع قيم θ فإن طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم : $\sin \theta + \cos \theta = L$

يساوي

- (أ) $|L|$ (ب) $|L \cos \theta|$ (ج) $|L \sin \theta|$ (د) $\left| \frac{L}{\sqrt{L^2 + 1}} \right|$

(٣١) إذا كان θ تنتمي للمستقيم : $\sin \theta - \cos \theta = 0$ ، θ تنتمي للمستقيم $\sin \theta - \cos \theta = 1$.فإن أقل قيمة لطول \overline{AB} تساوي

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٥

(٣٢) إذا كانت θ ، θ نقطتين على المستقيم $\sin \theta - \cos \theta = 0$ ، حيث طول \overline{AB} يساوي $4\sqrt{5}$ وحدة طولية، θ نقطة على المستقيم $\sin \theta - \cos \theta = 1$ ، فإن مساحة المثلث $\triangle ABC =$ وحدة مربعة.

- (أ) $12\sqrt{5}$ (ب) ١٢ (ج) $6\sqrt{5}$ (د) ٦

ثانياً الأسئلة المقالية

١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة θ إلى المستقيم ل إذا كانت :

(١) $\theta = (0, 0)$ ، $L : \overline{r} = (0, 0) + t(3, 4)$

(٢) $\theta = (2, -4)$ ، $L : \sin \theta + \cos \theta = 0$ ، $\sin \theta - \cos \theta = 43$

(٣) $\theta = (5, 2)$ ، $L : \sin \theta + \cos \theta = 19$ ، $\sin \theta - \cos \theta = 8$

(٤) $\theta = (2, -7)$ ، $L : \sin \theta + \cos \theta = 9$ ، $\sin \theta - \cos \theta = 0$

$$(5) \text{ ي} = (2, 6) \quad , \quad \text{ل} : \frac{\text{س}}{3} + \frac{\text{ص}}{2} = 2$$

$$(6) \text{ ي} = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \quad , \quad \text{ل} : (2-3)\text{س} + 2\sqrt{2}\text{ص} - 2\sqrt{2} = 0$$

٢ احسب طول نصف قطر الدائرة التي مركزها النقطة $M = (3, -1)$ ويمسها المستقيم الذي معادلته $\text{ل} : 4\text{س} + 3\text{ص} + 6 = 0$ « ٢ وحدة طول »

٣ أوجد بعد النقطة $(1, -2)$ عن الخط المستقيم المار بالنقطة $(2, -3)$ والذي يصنع زوايا متساوية القياس مع كل من الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات. « ٢٧ وحدة طول »

٤ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة $(1, 3)$ على الخط المستقيم : $2\text{س} + 3\text{ص} + 5 = 0$ يساوي $2\sqrt{13}$ وحدة طول فأوجد قيمة : 3 « ١٢ ، $-\frac{20}{3}$ »

٥ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة $(3, 1)$ على المستقيم : $3\text{س} - 4\text{ص} + 5 = 0$ يساوي 2 وحدة طول فأوجد قيمة : 3 « ١٥ ، -10 »

٦ إذا كان طول العمود الساقط من النقطة $(7, -1)$ على المستقيم : $4\text{س} + 3\text{ص} = 0$ يساوي $2\sqrt{10}$ وحدة طول فأوجد قيم : 4 الممكنة. « ١٢ ، $-\frac{13}{9}$ »

٧ أثبت أن المستقيمين : $\text{ل} : 2\text{س} + 3\text{ص} - 3 = 0$ ، $\text{لم} : \widehat{\text{ر}} = (8, 5) + \widehat{\text{ل}}(2, -1)$ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. « ٣٥ وحدة طول »

٨ أثبت أن المستقيمين : $\text{ل} : 3\text{س} - 4\text{ص} - 12 = 0$ ، $\text{لم} : 6\text{س} - 8\text{ص} + 21 = 0$ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. « ٤, ٥ وحدة طول »

٩ أثبت أن المستقيمين : $\text{ل} : \widehat{\text{ر}} = (2, 0) + \widehat{\text{ل}}(2, 5)$ ، $\text{لم} : \widehat{\text{ر}} = (3, -2) + \widehat{\text{ل}}(4, 10)$ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما. « ٢٩ وحدة طول »

١٠ طرق : طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تمثله المعادلة : $3\text{س} - 4\text{ص} - 7 = 0$ ومسار الطريق الثاني تمثله المعادلة : $3\text{س} - 4\text{ص} + 11 = 0$ أثبت أن : الطريقين متوازيان ثم أوجد أقصر بعد بينهما. « ٣, ٦ وحدة طول »

١١ إذا قطع المستقيم : $4\text{س} - 3\text{ص} = 12$ محوري الإحداثيات في النقطتين 9 ، 8 فأوجد :
(١) مساحة سطح المثلث 9 ب حيث و نقطة الأصل.
(٢) أقصر مسافة من نقطة الأصل إلى الخط المستقيم 9 ب « ٦ وحدة مربعة ، ٤, ٢ وحدة طول »

١٢ إذا كانت النقط $أ = (١، ٤)$ ، $ب = (٣، ٢)$ ، $ح = (٦، ٢)$ هي رؤوس مثلث فأوجد :

- (١) طول $ب ح$ (٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم $ب ح$
(٣) طول العمود الساقط من $أ$ إلى $ب ح$ (٤) مساحة $\Delta ب ح أ$

« ٥ وحدات طول ، ٣ ص + ٤ ح - ١٨ = ٠ ، ٥.٢ وحدة طول ، ١٣ وحدة مربعة »

١٣ أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط $أ = (٢، ٣)$ ، $ب = (٥، ٢)$ ، $ح = (٣، ١)$ « ١٥.٥ وحدة مربعة »

١٤ $أ ب ح د$ متوازي أضلاع فيه : $أ = (٤، ١)$ ، $ب = (٢، ٢)$ ، $ح = (٥، ١)$ ، $د = (١، ٥)$ أوجد :

- (١) إحداثي النقطة $د$ (٢) طول $ب ح$
(٣) معادلة المستقيم $ب ح$ (٤) طول العمود الساقط من $أ$ إلى $ب ح$
(٥) مساحة متوازي الأضلاع $أ ب ح د$

« (١، ٥) ، ٥ وحدات طول ، ٣ ص - ٤ ح - ١٧ = ٠ ، ٧.٢ وحدة طول ، ٣٦ وحدة مربعة »

١٥ أثبت أن النقط : $أ = (١، ٣)$ ، $ب = (٢، ٥)$ ، $ح = (٤، ٢)$ ، $د = (١، ٦)$

هي رؤوس متوازي أضلاع وأوجد مساحته. « ٢٥ وحدة مربعة »

١٦ أثبت أن النقط : $أ = (٣، ٢)$ ، $ب = (٢، ٦)$ ، $ح = (٢، ٢)$ ، $د = (١، ٢)$

هي رؤوس شبه منحرف وأوجد مساحته. « ١٨ وحدة مربعة »

١٧ $أ ب ح د$ شبه منحرف فيه : $أ ب // د ح$ ، فإذا كانت :

$أ = (١، ٢)$ ، $ب = (٣، ٥)$ ، $ح = (١، ٦)$ ، $د = (٤، ٤)$ (ص)

أوجد قيمة ص ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف $أ ب ح د$ « ٣ - ١٢ وحدة مربعة »

١٨ أوجد معادلة المستقيم الذي متجه اتجاهه $(٧، ١)$ وطول العمود النازل عليه من النقطة $(١، ٣)$ يساوي

$٣\sqrt{٢}$ وحدة طول. « ٧ ص + ٨ ح - ١٠ = ٠ ، ٧ ص + ٧ ح - ٥٢ = ٠ »

١٩ أثبت أن النقطتين : $(١، ١)$ ، $(٣، ٢)$ تقعان على جانبيين مختلفين من الخط المستقيم

$٣ ص - ٤ ح + ٣ = ٠$ وعلى بعدين متساويين منه.

٢٠ أثبت أن المستقيم : $٣ ص - ٤ ح + ٣ = ٠$ يمر كلاً من الدائرتين اللتين مركزاهما النقطتان

$م = (٢، ٥)$ ، $ن = (٣، ٢)$ واللتان طولاً نصفى قطريهما ٢ ، ٣ وحدة طول على الترتيب ، وبين

هل الدائرتان تقعان في جانب واحد أم في جانبي هذا المستقيم ؟

٢١ الربط بالهندسة : دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما :

$$٤س - ٣ص + ١٠ = ٠ ، ٥س - ١٢ص + ٢٦ = ٠ \text{ أثبت أن الوترين متساويان في الطول.}$$

٢٢ أثبت أن : النقطة (٨ ، ١١) هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث الذي معادلات المستقيمت الحاملة لأضلاعه

$$\text{هي : } \overleftrightarrow{AB} : (٢٠ ، ٣-) + (٠ ، ١) ، \overleftrightarrow{BC} : (٠ ، ١) ، \overleftrightarrow{CA} : (٠ ، ١) \text{ ، } ٥س - ١٢ص + ٢٦ = ٠ ، ٥س - ٤ص = ٠$$

٢٣ أثبت أن : ١ (٤ ، ٦) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

$$٩س - ١٣ص - ٨ = ٠ ، ٥س - ٣ص + ٤ = ٠$$

٢٤ أوجد مساحة الشكل الرباعي ١ ب ح د الذي رؤسه النقط :

$$١ = (٠ ، ٢) ، ٢ = (١ ، ٤) ، ٣ = (٥ ، ٣) ، ٤ = (٨ ، ٤-) \text{ «٢٣.٥ وحدة مربعة»}$$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ١ ب ح د مربع حيث ١ (٢ ، ٣-) ومعادلة ٢ ح د هي ٤س + ٣ص - ٩ = ٠

فإن مساحة المربع = وحدة مربعة.

(٢) ١ ب ح د مثلث متساوي الأضلاع فيه : ١ (٢ ، ١-) ومعادلة ٢ ح د هي ٣ص + ٢ = ٠

فإن طول ضلع المثلث ١ ب ح د = وحدة طولية.

(٣) معادلة الخط المستقيم الذي طول العمود المرسوم من (٠ ، ٠) عمودياً عليه يساوي ٤ وحدات وهذا الخط يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي

(١) ٣ص + ٢ = ٠ ، (٢) ٣ص + ٤ = ٠ ، (٣) ٣ص + ٢ = ٠ ، (٤) ٣ص + ٤ = ٠

(٥) إذا كان : ح هو طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم : ٣ص + ٢ = ٠ فإن : ب يمكن أن تساوي

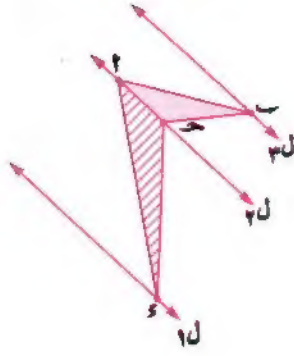
(١) (١ ، ١) ، (٢) (٠ ، ٠) ، (٣) (٠ ، ١) ، (٤) (١/٣ ، ١/٣)

(٥) إذا كان : ح هو طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستقيم :

٣ص + ٢ = ٠ فإن : ب يمكن أن تساوي

(١) ١ ، (٢) ٣ص ، (٣) ١/٣ ، (٤) ح

٦ في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة L_1 هي $2x + 3y + 4z = 0$

، معادلة L_2 هي $2x + 3y + 4z = 1$

، معادلة L_3 هي $2x + 3y + 4z = 4$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta 1, 2, 3)}{\text{مساحة } (\Delta 1, 2, 4)}$$

فإن : L_1 يمكن أن تساوى

٣- (د)

٥ (ج)

٥- (ب)

٣ (١)

٧ النسبة التي يقسم بها المستقيم $س - ص - ٢ = ٠$ القطعة المستقيمة \overline{AB} حيث $A(3, -1)$

، $B(8, 9)$ هي

(ب) $٢ : ١$ من الخارج

(١) $٢ : ١$ من الداخل

(د) $٣ : ٢$ من الخارج

(ج) $٣ : ٢$ من الداخل

٢ أوجد نقطة على المستقيم $س + ص + ٩ = ٠$ وتبعد عن المستقيم $س + ٢ + ٢ = ٠$

بمقدار $\sqrt{5}$ وحدة طولية. « $(-11, 2)$ ، « $(-21, 12)$ »

٣ إذا كانت : $A(3, 4)$ ، $B(4, 6)$ ، $C(-1, 2)$ ، $D(2, 0)$

فأوجد طول : \overline{AC} حيث C ، D نقطتا تقاطع العمودين المرسومين من C ، D على الخط المستقيم \overline{AB}

« $\frac{1}{\sqrt{5}}$ وحدة طول»

٤ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2, -4)$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوى ٢

وحدة طول وبين أن هناك مستقيمين يحققان هذه الشروط. « $س - ٢ = ٠$ ، « $س + ٣ + ٤ + ١٠ = ٠$ »

٥ إذا كانت : $A(3, 5)$ ، $B(11, 11)$ نقطتين ثابتتين فأوجد النقطة (أو النقط) C التي تنتمي لمحور

السينات بحيث تكون مساحة ΔABC تساوى ٣٠ وحدة مربعة. « $(0, \frac{19}{3})$ ، « $(0, \frac{41}{3})$ »

يُصرف مجاناً مع هذا الكتاب
الجزء الخاص بالامتحانات
الجزء الخاص بالإجابات



أدخل خدوك الشخص
الموجود على ظهر الغلاف
لمزيد من المعلومات
انظر صفحة ٣



6 223007 311717

الاول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

الآن بالمكتبات

المعاصر فى:

- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية
- لصف الأول الثانوى



مكتبة الطلبة

للطباعة والنشر والتوزيع

٣ شارع كامل صدقى - الفجالة

تليفون: ٢٥٩٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩ - ٢٥٩٣٤٠٣ / ٢

E-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com



الخط الساخن

١٥٠١٤



/ElMoasser.eg